


经典电动力学



第三版

北京大学物理学院


VERSION 1.0.5

开篇说明

2003年，农历癸未年春天，我突然被我自己告知：我将在下学期讲授电动力学课程。当时的我忙于各种现在已经回想不起来的各种杂务。要完成电动力学课程的备课任务实在是非常紧张的。就在这个时候，SARS来了，汹涌澎湃。它为北京带来了一场风暴，同时也把困扰我的各种杂务冲走了不少，使得我有时间来完成目前这个电动力学的备课笔记。开始准备笔记的时候，北京的疫情方兴未艾；第一稿完成的时候，北京的日增病例降到了个位数。希望在新的一个学期开学的时候，我可以不辱使命。

这个讲义可以供本课程的同学、教师免费下载。作者本人(也就是刘川!)对于讲义中的所有内容保有版权。未经作者本人许可，不允许将本讲义的全部或部分翻印后以任何方式销售给任何人；也不允许将其外传给非本课程的学生和教师；不允许将本讲义的部分或全部放在网络上。

本讲义是一个草稿，其中不乏各种错误。有些错误已经在课程的授课过程中改正了，但还有一些没有来得及改正，甚至可能有更多还没有被发现，欢迎大家指正。另外，讲义中的别字更是数不胜数。对于优美的祖国语言的这种摧残，我本人深表歉意，力争在下次修改时尽量更正。所以，这个讲义的版本在不断地更新中，我无法在每次更改时都通知读者，对此我深表歉意。

刘川，二零零三年五月 

二零零八年春，距离我第一次讲授电动力学又大约过了五年时间。我将在二零零八年秋季学期再次讲授电动力学。本讲义与上一个版本比较，改动还是比较大的。

首先，一个最为重要的改变就是在第一章到第五章采用了国际单位制。后面的几章没有用国际单位制，而是仍然采用高斯制。这样做的目的决不仅仅是懒惰。一般来说，在宏观电动力学的问题中使用国际制是通用的，同时也是方便的。但是在涉及微观粒子的电动力学过程中，我看不出使用国际制的任何理由。唯一的理由就是，一个课程中始终保持一种单位制会比较自然和自恰。但是，考虑到读者如果以后还要接触其他的理论物理课程，那么他/她或迟或早都要换到高斯单位制(或者类高斯，即海维赛德-洛仑兹单位制)；如果我们的读者以后始终与宏观电动力学现象为伍，那么对他们来说相对论性粒子的电动力学用什么单位制来讲授关系都不是不大。于是，我选择了在相对论性电动力学的地方完成单位制的转换。为了大家方便，本讲义的附录中讨论了各个常用的电磁单位之间的关系以及如何将一个单位制下的公式转换到另一个单位制。这其中的关系其实并没有

大家开始想象的那么困难，同时对于不同单位制的理解还有助于我们更好的理解电磁现象的本质。

另外，由于这次是4学分的电动力学课程，因此我将我上次的讲义稍微扩充了一些内容。具体来说，我们加入的主要内容有：第四章中，加入了关于电磁信号在色散介质中的传播的讨论（第19节）；加入了关于介质波导和光行的比较详细的讨论（第21.4小节）。第五章中，加入了关于辐射场的多极场展开的介绍（第25节）；随后的电磁波的散射的中也加入了利用多极场的方法研究散射的讨论（第26.3小节），等等。当然，我还尽可能地改正了许多上一版中的别字和明显的打印错误（尽管还有很多！）。最后一个小的改动，就是在封面加了一个图片，希望大家没有被“雷到”。这个讲义可能还会有变动，目前的版本号为1.2。

在改写这个版本的讲义过程中，曾与郑汉青讲授、朱守华讲授等人进行了多次讨论，使我获益匪浅。再次向他们表示感谢。如果这个讲义能够对我们北大的电动力学教学的其他老师有些微帮助，我就更感欣慰了。

刘川，二零零八年五月



二零零一年春，我将再次讲授电动力学。与上一版本比较，我仅仅进行了为数不多的内容调整，主要是对原先写得过于简略的部分进行了扩充。例如：静电学部分增加了柱坐标的部分内容（第9.2小节）以及相关例题（第9.4小节）、简要介绍了有限元方法（第10.2小节）、电磁波传播一章中水的吸收系数的图（第19节）、相对论电动力学中对于零质量粒子作用量的讨论（第31节的例题7.1）等。尽管多极场的内容在讲义中仍然包含在内，但是按照以往的经验，很可能没有足够的时间去涉及。因此，除非课时十分充裕，我十分可能会略去这些内容（第25节，第26.3小节）。另外，整个讲义的文字中的错误和别字被尽可能地订正了一遍，尽管一定还存在很多。目前的版本是1.3。

刘川，二零一零年正月



二零一一年秋，我将再次讲授电动力学。与上一版本比较，部分内容有所扩充：相对论性粒子的运动一章（第七章）增加了带电粒子在均匀静电磁场中运动的一节（第35节）、在带电粒子的辐射一章（第八章）增加了关于粒子辐射的频谱（第39节）和关于同步辐射的简要讨论（第40节）。另外，再次将讲义中一些“厚重”文字尽可能地进行了订正。目前的版本是1.4。

刘川，二零一一年八月



二零一七年春我将再次讲授电动力学。距离上一次讲授已经有将近6年了。这一版首先是得旧版的讲义重新换成了 $\text{Xe}_{\text{L}}\text{A}_{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$ 兼容的模式。从形式上讲，对文中的公式按照其

重要性大致为了三类：第一类是最为一般的公式，就利用 latex 排版出来（可能编号或不编号），比如说下面这个公式，

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

第二类是属于比较重要的公式。我利用了 empheq 宏包进行强调，它看起来像这样：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ,$$

第三类是非常重要的公式（例如麦克斯韦方程组等），我采用了 tcolorbox 宏包进行了重点强调，比如像这个，

Lorentz Force

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} ,$$

在内容方面也会做些小的调整。目前的版本是 1.5。

刘川，二零一六年十二月



目录

第一章	电磁场与麦克斯韦方程	1
1	真空中的麦克斯韦方程	2
2	麦克斯韦方程的对称性	3
3	电磁势与规范对称性	5
4	介质中的麦克斯韦方程	7
4.1	线性介质中的麦克斯韦方程组	7
4.2	各种介质的简单介绍	9
4.3	介质边界处的边界条件	12
5	电磁规律中的守恒律	14
第二章	静电学	18
6	泊松方程与静电边值问题	19
7	导体的边条件与导体组的能量	22
8	唯一性定理与静电镜像法	24
9	泊松方程的分离变量解法	27
9.1	直角坐标中的拉普拉斯方程的解	27
9.2	柱坐标中的拉普拉斯方程的解	28
9.3	球坐标中的拉普拉斯方程的解	29
9.4	例子	31
10	静电边值问题的数值解法	35
10.1	简单的网格法	36
10.2	有限元方法	38
11	静电多极展开	41

第三章	静磁学	46
12	环行电流的磁场与磁矩	47
13	磁场的能量	49
14	磁多极展开	51
15	磁标势与等效磁荷	55
第四章	电磁波的传播	60
16	均匀平面电磁波的基本性质	61
17	电磁波在介质表面的折射与反射	63
18	电磁波在导电介质中的传播	67
19	介质色散的经典模型	69
20	电磁信号在色散介质中的传播	72
	20.1 波包的色散	72
	20.2 因果性与 Kramers-Kronig 关系	74
	20.3 因果性与最大信号传播速度	76
21	波导与谐振腔	77
	21.1 麦克斯韦方程按照横向和纵向的分离	78
	21.2 金属波导	79
	21.3 谐振腔	81
	21.4 介质波导	82
第五章	电磁波的辐射和散射	91
22	电磁势波动方程的推迟解	92
23	谐振电荷和电流分布的电磁辐射	93
24	电偶极、磁偶极和电四极辐射	95
	24.1 电偶极辐射	95
	24.2 磁偶极辐射	96
	24.3 电四极辐射	97
25	辐射场的多极场展开	98
	25.1 亥姆霍兹方程的格林函数	99
	25.2 多极场的定义与多极场展开	100
	25.3 多极辐射的功率	102
26	电磁波的散射	103

26.1	散射问题的一般描述	103
26.2	偶极散射	104
26.3	散射问题的多极场展开	107
第六章	狭义相对论	111
27	狭义相对论的基本假设及其验证	111
28	洛伦兹变换	116
29	洛伦兹标量与 4-矢量	119
30	洛伦兹变换的数学性质	123
第七章	相对论性电动力学	126
31	自由粒子的拉氏量与运动方程	127
32	电磁场中粒子的拉氏量	130
33	运动方程与规范不变性	132
34	电磁场的作用量与电动力学的协变性	133
35	均匀静电磁场中带电粒子的运动	135
35.1	带电粒子在均匀静电场中的运动	135
35.2	带电粒子在均匀静磁场中的运动	136
35.3	带电粒子在均匀正交静电磁场中的运动	136
35.4	带电粒子在一般均匀静电磁场中的运动	137
第八章	运动带电粒子的辐射	139
36	李纳-维谢尔势	140
37	拉摩公式与汤姆孙散射	146
38	相对论性加速电荷的辐射	148
39	粒子辐射的频谱	150
40	同步辐射的频谱	152
41	切伦可夫辐射	155
42	辐射阻尼	157
42.1	Abraham-Lorentz 方程与辐射阻尼力	157
42.2	Abraham-Lorentz 模型与电子自能	159

附录 A	矢量与张量分析	163
1	矢量与张量的定义	163
2	矢量与张量的微积分	164
3	闵氏空间中的矢量与张量	165
附录 B	分析力学提纲	168
附录 C	电磁单位制	171

第一章

电磁场与麦克斯韦方程

本章提要

- 真空中的麦克斯韦方程 (1)
- 电磁现象的对称性 (2)
- 电磁势与规范对称性 (3)
- 介质的影响 (4) 和边条件
- 电磁现象中的守恒律 (5)

经典物理学 (classical physics) 的成就可以浓缩为两个最为成功的理论：一个是**经典力学**，它包括**牛顿力学**以及随后发展起来的**分析力学** (拉格朗日和哈密顿力学)；另一个就是以**麦克斯韦方程**为代表的**经典电动力学**。可以毫不夸张地说，这两个经典物理理论几乎含盖了我们日常生活中所遇到的所有物理现象。经典电动力学同时也是相关的电子工程、材料工程、通讯等应用领域中的重要理论基础。经典电动力学在现代物理学理论的发展中也占据了举足轻重的地位，它是**狭义相对论**诞生的摇篮；同时，经典电动力学中的一些重要概念—例如**规范不变性**等—更是近代量子场论的核心和基础。

本章中我们从真空中的麦克斯韦方程出发，提纲挈领地将麦克斯韦方程以及它的一些最基本的性质：对称性、守恒律、边界条件等加以简单介绍。这一章是电动力学课程的一个总纲，也是我们以后各章的一个出发点。

1 真空中的麦克斯韦方程

¶ 我们首先从真空中的麦克斯韦方程组出发。在 1873 年，麦克斯韦总结了以往电磁学的实验规律，首先引入了所谓的位移电流的概念并且写下了著名的麦克斯韦方程。¹ 在国际单位制中，我们把它写成：²

Maxwell Equations in Vacuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

方程 (1.1) 到方程 (1.4) 就是真空中的麦克斯韦方程的微分形式，其中矢量场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别是某个时空点的电场强度和磁感应强度。电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 一起，共同描写了真空中的电磁场； ρ 和 \mathbf{J} 是产生电磁场的电荷密度和电流密度；³ ϵ_0 和 μ_0 是国际单位制中所特有的两个常数，它们分别被称为真空中的介电常数和磁导率。这两个常数与真空中的光速 c 由下式联系：

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.5)$$

麦克斯韦方程中的每一个方程都是以历史上的著名实验为基础的。方程 (1.1) 反应了所谓的高斯 (Gauss) 定律，它源于著名的库仑 (Coulomb) 定律；方程 (1.2) 是安培 (Ampère) 环路定律加上麦克斯韦的位移电流的假设，我们称之为安培—麦克斯韦定律；方程 (1.3) 是所谓的法拉第 (Faraday) 电磁感应定律；方程 (1.4)

¹其中对他影响最大的是法拉第的电磁感应定律。

²我们目前所写下的三维形式的麦克斯韦方程并不是当初麦克斯韦用的形式。麦克斯韦当年实际上是利用分量形式写出的 (因此相当的烦杂)。目前这个优美的形式更多地要归功于亥姆霍兹、吉布斯特别是 Heaviside。我们后面会看到 (见第七章)，如果用四维协变形式来表述，麦克斯韦方程可以写得更为简洁、优美。

³电流密度和电荷密度分布可以是所谓的广义函数 (例如， δ -函数)，这样一来，这个公式也适用于分立电荷分布或电流分布的情形。

实际上是电场的库仑定律在磁学中的对应，它反映了自然界中没有孤立的磁单极。⁴

麦克斯韦对于电磁场理论的最大贡献，是他在总结前人实验定律的基础上，对以往的安培环路定律做出了修改，加入了位移电流的贡献。也就是说，与前人的结果比较，他仅仅是改变了方程 (1.2)，而其他的电磁场方程则与前人的结果完全相同。但是，这个看似小小的改动却是本质的，它使得整个麦克斯韦方程组成为一个完整的、自我支撑的动力学体系，并且体现出许多重要的对称性。

¶ 麦克斯韦方程回答了电磁场本身所满足的物理规律。如果一个带电粒子处在外加的电磁场之中，它会受到电磁场对它的电磁相互作用，这个相互作用力的大小由著名的洛伦兹力公式给出。如果我们假定空间存在着电荷分布和电流分布，那么这些电荷以及电流分布在单位体积内感受到的力（即力密度）为：

Lorentz Force

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

其中 ρ 和 \mathbf{J} 是空间的电荷密度分布和电流密度分布。洛伦兹力的公式与麦克斯韦方程组一起构成了经典电动力学的基础。

2 麦克斯韦方程的对称性

¶ 前面提到，麦克斯韦方程具有一系列十分重要的对称性。这一节中，我们就来讨论这些对称性中的一部分。

1. 线性：

麦克斯韦方程的一个重要的特性就是它对于电磁场是线性的。这种线性意味着经典电磁场满足所谓的线性叠加原理。⁵ 也就是说，如果真空中的电荷分布 ρ_1 和电流分布 \mathbf{J}_1 所产生的电磁场为 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{B}_1 ，电荷分布 ρ_2 和电流分布 \mathbf{J}_2 所产生的电磁场为 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{B}_2 ；那么当 ρ_1 ， \mathbf{J}_1 和 ρ_2 ， \mathbf{J}_2 同时存在时，它们所产生的电磁场一定是 $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$ 和 $(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ 。因此，我们只需要知道一个单位点电荷以及单位电流元所产生的电磁场，就可以利用线性叠加原理来得到任意电荷和电流分布下的电磁场。⁶

2. 洛伦兹协变性：

麦克斯韦方程所具有的连续对称性中最为重要的有两个：其中一个便

⁴磁场的磁力线构成一个闭合的回路（不存在磁单极）的思想可以追溯到笛卡儿（Descartes, 1644）关于磁性的理论。

⁵我们特别强调经典电磁场是因为这种线性叠加的特性在考虑了量子效应以后（量子电动力学）实际上会被破坏。

⁶这个特性在数学上的体现是可以运用所谓的格林函数来求解线性方程。参见第二章中的讨论。

是洛伦兹不变性，它体现了电磁场在时空变换下的性质；另一个是所谓的规范对称性。洛伦兹不变性是指麦克斯韦方程是与爱因斯坦的狭义相对论完全兼容的。爱因斯坦的狭义相对论认为：不同惯性参照系中的物理规律的形式应当是相同的，这被称为相对性原理；同时，不同参照系之间的时空变换由洛伦兹变换来描写。经典电磁场所满足的麦克斯韦方程恰恰具有这个特性，即它在不同惯性参照系之间的洛伦兹变换下保持形式不变。这个对称性是如此地重要，以至于我们必须用大量的篇幅来加以认真讨论（见第七章）。

3. 规范不变性:

麦克斯韦方程组具有的另一个十分重要的对称性就是所谓的规范对称性，我们将在下面（第3节）仔细讨论。

4. 分立对称性:

麦克斯韦方程除了上面提及的两个连续对称性以外，它还具有一些重要的分立对称性。我们这里着重讨论两类分立对称性：空间反射和时间反演。

- 空间反射变换：就是将所有的空间坐标都改变一个符号： $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ 的变换。这个变换又被称为宇称变换。注意到在这个变换下面，电荷密度是不变的；电流密度会改变一个符号（因为造成电流的微观带电粒子的速度改变了符号）；梯度算符也改变一个符号。考察真空中的麦克斯韦方程我们发现，电磁场应当按照下列形式变化：

$$\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}. \quad (1.7)$$

这样一来，麦克斯韦方程组的形式就在空间反射变换下不变。由此我们发现电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} ，尽管它们都是三维空间的矢量，但是它们在空间反射变换下的性质是不同的。电场 \mathbf{E} 在空间反射变换下的变换性质与坐标 \mathbf{x} 的变换性质是相同的，即要改变一个符号；磁场 \mathbf{B} 则不变。一般人们将具有电场或坐标这样变换性质（即在空间反射下变号）的三维矢量称为矢量；将磁场这类在空间反射下不变的矢量称为轴矢量。⁷

- 时间反演变换：另一个可以考虑的对称性是时间反演变换。从形式上讲，时间反演变换相当于将时间反号： $t \rightarrow -t$ 的变换。在这个变换下，电流密度矢量会变号，另外对于时间的偏微商算符也会变号。如果我们考察四个麦克斯韦方程，我们发现要保证麦克斯韦方程的形式在时间反演下不变，相应的电磁场应当如下变换：

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}. \quad (1.8)$$

⁷这应当不是读者第一次接触到轴矢量。经典力学中的角速度、角动量矢量都是轴矢量。

我们看到，电场和磁场在时间反演下也具有不同的变换性质。

3 电磁势与规范对称性

上一节曾经提到：规范对称性是电磁场所具有的一个重要的对称性。它的重要性在经典电动力学中还没有体现得非常充分，但是在现代量子场论的体系中，规范对称性可以说是处于核心的地位。在经典电动力学中，规范对称性是通过所谓的电磁势来体现的。

真空中的麦克斯韦方程是关于电磁场的一阶偏微分方程组。经过适当的变化，可以将它们化为相互独立的二阶偏微分方程。最为直接的方法就是引入电磁势 (Φ, \mathbf{A}) ，其中 Φ 称为标量势，或简称为标势； \mathbf{A} 称为矢量势，或简称为矢势。

首先考察两个齐次的麦克斯韦方程，由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，所以我们一定可以将磁感应强度 \mathbf{B} 写成某个矢量场 \mathbf{A} 的旋度：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (1.9)$$

其中 \mathbf{A} 称为矢量势（矢势）。这时，另外一个齐次的麦克斯韦方程可以写成：

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

由于上面公式中括号内的场是一个无旋场，所以它一定可以表达成某个标量场——我们称之为标势 Φ 的负梯度： $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$ 。于是我们有：

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (1.10)$$

其中 Φ 就是所谓的标量势，或简称标势。

需要指出的是，电磁势的定义是不唯一的。也就是说，可以存在两套不同的电磁势： (Φ, \mathbf{A}) 和 (Φ', \mathbf{A}') ，它们对应于相同的电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 。要实现这一点，这两套电磁势是相互有关系的。具体地说，如果我们任意选取一个标量场 Λ 并且令：

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda , \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} , \quad (1.11)$$

经过简单的运算可以验证：这两套电磁势所对应的电磁场是相同的。电磁场所具有的这种对称性（或者说不变性）被称为规范对称性。公式 (1.11) 所描写的两套等价的电磁势之间的变换称为规范变换。

由于电磁场存在规范对称性，而在经典电动力学过程中，所有可以直接测量的物理量都仅仅与电磁场（而不是电磁势！）有关，这就意味着在经典电动力学中，电磁势本身具有一定的不确定性，它们并不是可以直接测量的物理量。⁸ 规范变换 (1.11) 正体现了选取电磁势的这种“任意性”。在经典电动力学中，取决于所处理问题的不同，我们完全可以为电磁势加上一个附加的条件从而将它们完全确定。这类条件被通称为 **规范条件**，而选取一定规范条件的步骤被称为 **定规范**。满足一定规范条件的电磁势就被称为某种规范中的电磁势。例如，在经典电动力学中十分常用的一个规范是所谓的 **洛伦兹规范**，⁹ 它又被称为 **协变规范**。在这个规范中电磁势满足：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 . \quad (1.12)$$

另外一个常用的规范是所谓的 **库仑规范**，它又被称为 **辐射规范** 或 **横规范**。这个规范中的电磁势满足的数学条件是：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (1.13)$$

¶ 电磁势的引入使得真空中麦克斯韦方程组中的两个齐次方程自动得到满足。如果将电场的表达式 (1.10) 代入到麦克斯韦方程中的第一个方程（高斯定律）中，我们得到：

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\rho / \epsilon_0 .$$

类似的，将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入到麦克斯韦方程组的第二个方程中，我们有：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\mu_0 \mathbf{J} .$$

现在，我们取洛伦兹规范，也就是要求电磁势满足条件 (1.12)，于是上面两个方程都可以简化为：

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 , \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} . \quad (1.14)$$

因此我们看到，在洛伦兹规范下真空中的麦克斯韦方程组化为相互独立的、关于电磁势的波动方程，它预示着电磁势（从而电磁场）具有波动形式的解。理所当然的，这种波被称为 **电磁波**。根据波动方程的形式，我们发现电磁波在真空中的波速为 c ，即与真空中的

⁸我们强调这一点仅仅在 **纯粹经典** 的范畴中是正确的。如果考虑量子效应，那么电磁势可以具有可观测的物理效果，典型的例子就是所谓的 Aharonov-Bohm 效应。

⁹特别提请大家注意，这个洛伦兹不是大家所认为的那个洛伦兹。提出这个规范条件的是丹麦的物理学家洛伦兹 (L. Lorentz)，而不是提出洛伦兹力以及洛伦兹变换的荷兰物理学家洛伦兹 (H.A. Lorentz)。

光速吻合。这一点在历史上曾经作为支持可见光也是一种电磁波的强烈证据。尽管在现在已经是常识性的知识了，但在麦克斯韦的年代，当人们认识到这一点的时候，那还是一件很酷的事情。从此，电、磁、光这三个原先被认为完全不同范畴的东西被和谐地统一在一起了。

4 介质中的麦克斯韦方程

¶ 如果我们考虑的空间存在 **介质**，那么其中的电磁现象则会 **更为复杂**。从原则上讲，如果以原子尺度来考虑问题，那么所谓介质无非是大量的、不断运动的微观粒子的集合体。这些微观粒子一般都带有电荷或磁矩。因此，介质中的电磁场原则上是我们外加的电磁场和这些介质中的微观粒子所产生的电磁场线性叠加后，再进行某种统计平均的结果。现代物理学告诉我们，微观粒子从本质上说遵从 **量子力学** 而不是经典力学。因此，从微观第一原理出发处理介质中的电磁现象将是量子力学和统计物理的课题。作为经典电动力学课程，我们将满足于一个 **经典的**、而且很多情形下是 **唯象的** 描述。

4.1 线性介质中的麦克斯韦方程组

我们首先考虑所谓线性、各向同性、均匀的介质。当存在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 时，它会使介质极化（电极化、磁化）。因此，介质单位体积中的平均 **电偶极矩** 会不为零。¹⁰我们称介质单位体积中的平均电偶极矩为介质的 **电极化强度** 矢量，记为 \mathbf{P} 。由于介质中电极化强度（电偶极矩）的存在，就会附加产生一个电荷密度分布，这个电荷分布与自由的电荷分布不同，它是由于介质分子极化造成的，因此不能在介质中自由流动。我们称这种电荷为 **束缚电荷**。在介质内任意取一个封闭曲面，简单的考察我们发现：该封闭曲面内所包含的束缚电荷的总电量 Q_b 可以写成：

$$Q_b \equiv \int d^3\mathbf{x} \rho_b = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} ,$$

由于我们取的封闭曲面的任意性，上面这个积分表达式可以化为介质内任意一点的微分关系：

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} , \quad (1.15)$$

其中 ρ_b 是介质内任意一点的束缚电荷密度。类似的，在介质边界面上的束缚电荷面密度为（假定介质外是真空）：

$$\sigma_b = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} . \quad (1.16)$$

¹⁰将带等量（设其绝对值为 $q > 0$ ）但符号相反的两个点电荷靠近，这样就构成了一个 **电偶极子**。描写一个电偶极子的特征物理量是它的 **电偶极矩** \mathbf{p} 。假定带有 $+q$ 的点电荷相对于带有 $-q$ 的点电荷的位移矢量为 \mathbf{d} ，那么这个电偶极子的电偶极矩的定义为： $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ 。

如果束缚电荷密度的分布随时间改变, 就会产生 **束缚电流密度** 分布, 它完全是由于束缚电荷密度随时间变化引起的, 记为 \mathbf{J}_b 。由于束缚电荷本身必须满足连续性方程: $\partial\rho_b/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}_b = 0$, 因此与 (1.15) 比较我们有:

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (1.17)$$

考虑到分子内部的带电微观粒子是在运动的, 这也会产生一个电流密度分布, 我们称之为 **分子电流密度** \mathbf{J}_m 。这个概念是安培首先引入的, 它的存在同样可以产生磁场。当介质被外加磁场磁化时, 介质中的单位体积中的平均 **磁偶极矩**¹¹ 被称为该介质的 **磁化强度** 矢量, 记为 \mathbf{M} 。在介质中取一个由无穷小闭合回路 C 所围成的面积元, 记该面积元的法向方向为 \mathbf{n} , 那么我们有:

$$\int \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} ,$$

所以, 分子电流密度与磁化强度之间的关系为:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (1.18)$$

同样的, 在介质表面由于分子电流所造成的面电流密度为:

$$\mathbf{K}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{M} . \quad (1.19)$$

¶ 现在我们可以按照上面这个简化的模型来推导出介质中的麦克斯韦方程组了。显然, 两个齐次的麦克斯韦方程不会有任何变化。对于两个非齐次的方程, 我们只需要将电荷密度中加上束缚电荷密度; 在电流密度中加上束缚电流密度和分子电流密度就可以了。于是这两个方程变为:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})/\epsilon_0 , \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) , \quad (1.21)$$

于是我们引入 **电位移矢量** \mathbf{D} 和 **磁场强度矢量** \mathbf{H} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (1.22)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} . \quad (1.23)$$

¹¹ 让我们回忆一下一个平面电流环的 **磁矩** 的定义。如果存在一个平面的电流环, 它所包围的面积为 S , 电流强度为 I , 按照右手法则所确定的平面法向的单位矢量为 \mathbf{n} , 那么这个平面环行电流就构成了一个 **磁偶极子**, 表征它的物理量是它的 **磁偶极矩**, 或简称 **磁矩**。这个平面电流环的磁矩 \mathbf{m} 的定义为: $\mathbf{m} = (SI)\mathbf{n}$ 。

这样一来，介质中的麦克斯韦方程组可以写成

Maxwell Equations in media

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.27)$$

¶ 这里我们需要指出，上面的讨论是一个十分简化的模型。在一般的情形下，电位移矢量 \mathbf{D} 和磁场强度矢量 \mathbf{H} 与电场 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的关系可能是十分复杂的。这种关系被称为这种介质中的 **本构关系**（或 **本构方程**）：

• • • •

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (1.28)$$

原则上讲，上述关系不仅仅可以是非线性的，甚至可以是非局域的。我们将 **假设** 上面所讨论的最为普遍的本构方程可以用比较简化的形式 (1.22) 和 (1.23) 来替代。更为富有启发性的推导是对微观的麦克斯韦方程进行平均，从而推导出介质中的麦克斯韦方程。这方面的讨论可以参考 [6] 中的相关章节。

4.2 各种介质的简单介绍

¶ 下面我们简要描述一下我们电动力学课程中会遇到的各种介质：

☞ 线性介质：

这种介质中，电极化强度 \mathbf{P} 和磁化强度 \mathbf{M} 对电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的依赖关系可以用一个普遍的线性关系表达。我们将它写成：¹²

$$\mathbf{P}_i(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{ij}^{(e)}(t') \mathbf{E}_j(t-t'). \quad (1.29)$$

$$\mathbf{M}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{ij}^{(m)}(t') \mathbf{H}_j(t-t'). \quad (1.30)$$

注意我们这里写出了—个比较普遍的线性关系，它们对于时间不是局域的，¹³也就是说，任意一个时刻的电或磁极化强度可以与其他时刻的电场和磁场有关联。按

¹²纯粹由于历史的原因，磁介质中的磁化率是用场 \mathbf{H} 而不是 \mathbf{B} 来表达的。

¹³最为普遍的线性关系实际上还可以包含空间的不局域性。也就是说，某个点的极化情况还可以依赖于空间其他点的外场。这种现象被称为 **空间色散**。它仅仅出现在非常特殊的情形下，在绝大多数情况下它的效应是很小的。我们的课程中将不讨论。

照因果性的要求，系数 $\chi_{ij}^{(e)}(t)$ 和 $\chi_{ij}^{(m)}(t)$ 在 $t < 0$ 时应当恒等于零，也就是说每个时刻的极化只与该时刻之前的场有关，不可能与该时刻之后的场有关。¹⁴上面两个公式的右端实际上是函数 χ_{ij} 和外场的卷积。所以，如果我们将所有函数作一个时间傅立叶变换，我们就得到如下的形式：¹⁵

$$\mathbf{P}_i(\omega) = \chi_{ij}^{(e)}(\omega)\mathbf{E}_j(\omega) , \quad \mathbf{M}_i(\omega) = \chi_{ij}^{(m)}(\omega)\mathbf{H}_j(\omega) . \quad (1.31)$$

其中 $\chi_{ij}^{(e)}(\omega)$ 和 $\chi_{ij}^{(m)}(\omega)$ 则被称为电极化率张量和磁化率张量。¹⁶现在利用场 \mathbf{D} , \mathbf{H} 的定义式 (1.22) 和 (1.23) 我们就得到：

$$\mathbf{D}_i(\omega) = \epsilon_{ij}(\omega)\mathbf{E}_j(\omega) , \quad \mathbf{B}_i(\omega) = \mu_{ij}(\omega)\mathbf{H}_j(\omega) , \quad (1.32)$$

其中 $\epsilon_{ij}(\omega)$ 和 $\mu_{ij}(\omega)$ 分别称为介质的介电张量和磁导率张量，它们只与介质的性质有关，不再依赖于电磁场。它们与电极化率张量和磁化率张量的关系是：

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_0 \left(\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(e)}(\omega) \right) , \quad \mu_{ij}(\omega) = \mu_0 \left(\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(m)}(\omega) \right) . \quad (1.33)$$

对于静态的外场，只要介质不具有电滞或者磁滞现象，那么该介质的介电张量和磁导率张量一定是一个对称的张量；对于非静态的情形，利用 Onsager 的互易关系，也可以证明它是一个对称的张量（参见 [11] 中的 §13, §96 两节）。满足上述关系（即从公式 (1.31) 到公式 (1.33)）的介质被统称为线性介质。

如果进一步假设线性介质具有旋转对称性，¹⁷这时我们称之为各向同性线性介质，那么它的介电张量和磁导率张量都退化为与单位张量成正比，也就是说： $\chi_{ij}^{(e/m)}(\omega) = \chi^{(e/m)}(\omega)\delta_{ij}$ 。于是，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) &= \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) , \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi^{(e)}(\omega)) . \\ \mathbf{H}(\omega) &= \frac{1}{\mu(\omega)}\mathbf{B}(\omega) , \quad \mu(\omega) = \mu_0(1 + \chi^{(m)}(\omega)) . \end{aligned} \quad (1.34)$$

其中 $\epsilon(\omega)$ 被称为介质的电容率或者介电常数；¹⁸ $\mu(\omega)$ 则被称为介质的磁导率。

无量纲参数 $\chi^{(e)}(\omega)$ 和 $\chi^{(m)}(\omega)$ 称为该各向同性线性介质的电极化率和磁化率。

¹⁴利用这一点，可以得到一系列十分有意义的关于介电常数的解析性的结论，这些结论集中的体现在所谓的 Kramers-Kronig 色散关系中。参见本讲义后面第 20 节的讨论

¹⁵我们这里假设了 \mathbf{D} 只线性依赖于 \mathbf{E} ，而 \mathbf{H} 只是线性依赖于 \mathbf{B} 。也就是说不存在电和磁之间的“混合”，这对于多数情形是正确的。唯一的常见的例外是介质本身在运动的情形，参见 [11] 中的讨论。

¹⁶这依赖于傅里叶变换中对归一化常数的约定。这里的约定是对于所有的场都采用相同的约定而对于电极化率和磁化率则采用： $\chi(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega t}$ 。

¹⁷事实上，只需要立方对称性就足以将介质的介电张量和磁导率张量约化为一个标量。

¹⁸不同的书籍文献名称不太统一。有的书籍强调有量纲的 ϵ 应当称为电容率，只有无量纲的相对介电常数被称为介电常数。有的则直接称 ϵ 为介电常数，称 ϵ/ϵ_0 为相对介电常数。

一般人们又称无量纲的量 $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ 为该介质的 **相对介电常数**；称 $\mu(\omega)/\mu_0$ 为介质的 **相对磁导率**。

需要指出的是，大量的线性介质都 **不是** 各向同性的。例如，绝大多数的晶体都是各向异性的。只有液体和气体以及个别的固体（具有立方对称性的）是各向同性的。对于各向同性的线性介质，其电极化率永远是正的；但磁化率则可以是正的（被称为 **顺磁性**），也可以是负的（被称为 **逆磁性** 或 **抗磁性**）。一般来说，抗磁性是由于构成介质的原子具有饱和的原子轨道；否则它一般具有顺磁性。另一种重要的磁介质是所谓的 **铁磁介质**。**铁磁性** 源于一些过渡元素原子之间的交换相互作用。一般来说，介质对于外加电场的响应取决于该介质的构成以及它的结构。对于这个问题的系统讨论属于固体物理学的一个重要课题；介质的磁性则更为复杂。**磁学** 已经成为凝聚态物理学的一个重要分支。我们这个课程不可能对介质的电磁性质进行十分详细的讨论。我们将仅仅从一些简单的唯象模型（例如第 19 节中讨论的振子模型）出发，简要说明介质的电磁性质。

介电常数和磁导率一般依赖于外场的圆频率 ω ，其中介电常数对频率的依赖更是明显。介电张量依赖于电磁场的频率的现象被通称为 **色散**。我们会在后面电磁波传播的一章中更为详细地讨论它的物理。另外值得指出的是，介电常数和磁导率一般都依赖于温度。例如对于顺磁介质，其磁化率一般反比于温度。这些问题是统计物理学中的重要研究对象。

☞ 导体：

这是具有导电性能的介质。它的例子比如金属、导电溶液、电离的等离子体等等。这一类介质在电场中会相应地产生宏观的电流。一般来说，这种电流的流动也同时伴随着热的产生，因此这种介质一定是 **耗散的**。也就是说，电磁场的能量会不断地转换成介质的内能。金属的导电性是一个固体物理中十分重要而复杂的问题。我们这里不去讨论其导电机理，而是假设电流密度 \mathbf{J} 与电场 \mathbf{E} 有着线性的联系。类似于前面线性介质的讨论，我们把这种普遍的线性关系唯象地写成：

$$\mathbf{J}_i(\omega) = \sigma_{ij}(\omega)\mathbf{E}_j(\omega) , \quad (1.35)$$

其中的 $\sigma_{ij}(\omega)$ 被称为电导率张量，它原则上是频率的函数。这个线性关系可以称为 **广义欧姆定律**。如果导电介质是各向同性的，那么利用对称性可以证明电导率张量退化为正比于单位张量，其比例系数就是所谓的电导率 $\sigma(\omega)$ ，这时我们就得到了通常的 **欧姆定律**：

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega) . \quad (1.36)$$

在静电学、静磁学中经常会遇到的一类特殊的导体称为 **理想导体**，所谓理想导体就是电导率趋于无穷大的导体。理想导体的一个实际例子就是 **超导体**。理想导体内部的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 都等于零（后者即所谓的 **迈斯纳效应**）。

☞ 铁磁体、铁电体：

首先明确地指出，**铁磁体** 和 **铁电体** 不是线性电介质和线性磁介质，公式 (1.31) 对于铁磁体和铁电体 **绝不适用**。铁电体和铁磁体的特点是在外电场或外磁场是零的时候它也存在自发的电极化或磁化。介质具有铁电性和铁磁性的原因完全是构成介质的原子的微观性质造成的。关于铁磁性的研究已经成为物理学的一个专门的分支——磁学。本课程中我们将假设公式 (1.22) 和 (1.23) 仍然适用。我们课程中会遇到的一类重要铁磁体是所谓的 **硬铁磁体**，这种介质的磁化强度 \mathbf{M} 几乎不依赖于外磁场。

4.3 介质边界处的边界条件

¶ 在两种不同介质的交界面附近，电磁场必须满足一定的边界条件，这些边界条件可以从积分形式的麦克斯韦方程得到。考虑如图 1.1 中所示的两种介质（我们分别称为介质 1 和介质 2）的分界面上的任意一点，我们可以在该点附近构造一个底面与该点法向方向垂直、高度为无穷小的柱体。柱体的两个底面分别处于两种介质之中，同时底面积 ΔS 也是无穷小（我们以后常常会称这类小柱体为“高斯小盒”）。将方程组 (1.24) 中的第一个方程在这个无穷小的柱体体积元中积分并且利用高斯定理，我们得到：

$$\int d^3x \nabla \cdot \mathbf{D} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \Delta S$$

当高度和底面积都趋于零时， \mathbf{D} 在无穷小柱体表面的积分就等于： $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \Delta S$ ，于是我们得到：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (1.37)$$

其中 \mathbf{n} 是两个介质交界面处由介质 1 指向介质 2 的单位矢量， σ 是两个分界面处的自由面电荷密度。¹⁹

类似地，从麦克斯韦方程组的第四个方程出发，运用类似的方法，我们可以得到磁感应强度矢量在两种介质边界处的行为：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (1.38)$$

¹⁹请大家不要将面电荷密度和导体中的电导率混淆了，两者都习惯性地用字母 σ 来表示。

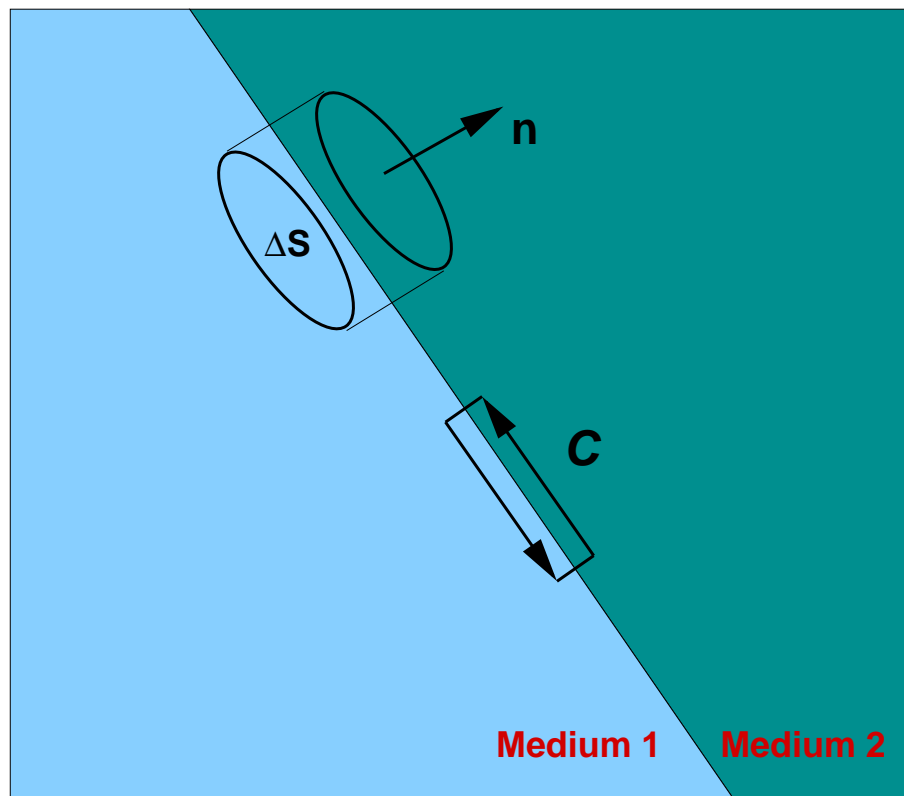


图 1.1: 推导电磁场在两种介质界面处的边界条件的示意图。左上角的无穷小高斯小盒可以用来推导电磁场法向的边界条件 (1.37) 和 (1.38); 右下角的无穷小安培小回路可以用来推导电磁场切向的边界条件 (1.39) 和 (1.40)。

边界条件 (1.37) 和 (1.38) 确定了电磁场的法向分量在介质分界面附近的行为。它告诉我们，在两种介质的分界面处，磁感应强度矢量 \mathbf{B} 的法向分量连续；电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量可以有一个跃变，其跃变的数值为 σ 。

¶ 我们现在考虑在两种介质的交界面处构造一个无穷小的矩形回路 C ，并且使矩形回路的一对边与交界面的切向平行，另一对边与交界面的法向平行。同时，我们令其沿法向的两个边长为高阶的无穷小（我们将称这种回路为“安培小圈”）。那么我们由麦克斯韦方程和斯托克斯定理可以得到：

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS .$$

由于回路 C 所围成的面积 S 为无穷小，而 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 在边界处为有限，于是上面式子的右方趋于零。于是我们得到电场强度 \mathbf{E} 在边界处的行为：

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 , \quad (1.39)$$

也就是说， \mathbf{E} 的切向分量在边界处连续。

类似地，我们利用麦克斯韦方程组中的第二个方程，就可以确立磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量在介质交界面处的跃变，得到的结果为：

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} , \tag{1.40}$$

其中 \mathbf{K} 为两种介质交界面处的自由面电流密度。

¶ 假定我们知道了所考虑的介质的性质，也就是说我们知道了它的本构方程，那么一旦给定空间的电荷密度和电流密度分布以及必要的边条件，数学中关于偏微分方程的理论告诉我们：满足麦克斯韦方程的电磁场就被唯一地确定了。怎样得到这些电磁场以及相关的物理性质正是我们这个课程所要讨论的主要内容。

5 电磁规律中的守恒律

¶ 麦克斯韦方程中已经隐含了 **电荷守恒定律**，它的微分表述是所谓的 **连续方程**：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \tag{1.41}$$

这一点可以直接利用真空中的麦克斯韦方程 (1.1) 和 (1.2)，或者介质中的方程组 (1.24) 加以证明。

¶ 下面我们来讨论电磁系统中的 **能量守恒** 的问题。我们所考虑的系统由产生电场的源——也就是电荷密度分布和电流密度分布一加上由它们在空间所产生的电磁场组成。考虑在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 中的一个电量为 q ，速度为 \mathbf{v} 的运动的带电粒子，电场会对该粒子做功，而磁场对这个粒子不做功，因为磁场对于粒子施加的力永远与该粒子的速度垂直。力学的知识告诉我们，电场 \mathbf{E} 对粒子做功的功率为： $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ 。一般来讲，如果空间存在一个电流密度的分布 \mathbf{J} ，那么电场对电流密度²⁰所做的功率 W 为：

$$W = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} .$$

这部分能量实际上是由电磁场的能量转化为了带电粒子的机械能或热能。利用麦克斯韦方程，上述功率可以表达为：

$$W = \int d^3\mathbf{x} \left(\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) .$$

现在我们利用下列恒等式：

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) ,$$

²⁰这是个简化的说法。确切的说，应当称为电场对引起电流的带电粒子所做的功的功率。

以及麦克斯韦方程中的法拉第定律： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，就可以将上面的功率化为：

$$W = - \int d^3 \mathbf{x} \left(\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) . \quad (1.42)$$

上面公式的右方具有典型的连续方程的形式。我们定义电磁场的 **能量密度** u ：

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) , \quad (1.43)$$

以及 **能流密度** \mathbf{S} ：

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \quad (1.44)$$

于是我们可以将电磁场与电流之间的功率写为 (假定我们处理的是非耗散的线性介质)：

$$\int d^3 \mathbf{x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) = - \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} . \quad (1.45)$$

这个式子的物理意义十分明显：在任意一个体积内的电磁场的能量的变化率由两部分构成：一部分是由于电磁场能流通过体积的边界流出；另一部分则转化为带电粒子的能量。能流密度 \mathbf{S} 又被称为电磁场的 **坡印廷矢量** (Poynting vector)。

¶ 运用类似的手法可以讨论电磁场和带电粒子系统中的 **动量守恒** 问题。考虑一个任意的选定的空间区域，我们将该区域内的带电粒子 (源) 的总动量 (矢量) 记为 $\mathbf{P}^{(\text{src})}$ ，那么运用洛伦兹力的公式 (1.6)，我们有：

$$\frac{d\mathbf{P}^{(\text{src})}}{dt} = \int d^3 \mathbf{x} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) . \quad (1.46)$$

我们现在仍然是利用麦克斯韦方程，将上式中的源 (也就是 ρ 和 \mathbf{J}) 用电磁场的时空微商来替代：

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \left(\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) . \quad (1.47)$$

上面公式中含有电场对时间偏微商的项可以化为：

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .$$

将此式代入 (1.47)，利用麦克斯韦方程： $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 得到：

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}^{(\text{src})}}{dt} + \frac{d}{dt} \int d^3 \mathbf{x} \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ = \epsilon_0 \int d^3 \mathbf{x} [\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] . \end{aligned} \quad (1.48)$$

现在注意到下面的恒等式：

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \partial_j \left(\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij} \right) ,$$

以及对于磁感应强度 \mathbf{B} 类似的等式，我们可以将上面的公式化为：

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{P}^{(\text{src})} + \mathbf{P}^{(\text{field})}]_i = \int d^3\mathbf{x} \partial_j T_{ij} . \quad (1.49)$$

在这个公式中，我们定义了我们所考虑的区域内地磁场的总动量：

$$\mathbf{P}^{(\text{field})} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{g} . \quad (1.50)$$

它由电磁场的动量密度矢量在该区域内积分得到。电磁场的动量密度矢量（单位体积内电磁场的动量）的定义为：

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} , \quad (1.51)$$

我们还定义了电磁场的协强张量 T_{ij} ：

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + c^2 \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{ij} \right] . \quad (1.52)$$

它被称为 **麦克斯韦 协强张量**。利用高斯定理，公式 (1.49) 的右边可以化为麦克斯韦协强张量在该区域边界面上的积分。公式 (1.49) 所代表的物理意义现在变得比较清晰了，它说明任意区域内的带电粒子（源）动量的变化率与该区域内电磁场的动量变化率之和等于通过该区域边界静流入的动量变化率，而在单位时间内从该区域的边界流入的动量是通过麦克斯韦协强张量在边界面上的面积分所体现的。如果我们在空间任意曲面上某处取其向外的法线方向单位矢量 \mathbf{n} ，那么 $T_{ij} n_j$ 代表了通过该处单位面积、单位时间内流入的动量的第 i 分量。

值得注意的是，电磁场的动量密度 \mathbf{g} 与电磁场的能流密度有着一个简单的关系：

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 . \quad (1.53)$$

在讨论过狭义相对论下的电动力学以后我们会看到（见第 34 节的讨论），这一点不是偶然的。实际上，这两者以及电磁场的能量密度以及麦克斯韦协强张量一起，构成了电磁场四维形式的能量动量张量。

¶ 前面讨论了电磁场的能量和动量守恒问题，完全类似地我们可以讨论电磁场和带电粒子的 **角动量守恒** 问题。为了简化讨论，我们仅仅考虑纯电磁场的情形。这时，如果空

• • • • •

间同时存在电场和磁场，那么空间的任意一点就存在电磁场的动量密度： $\mathbf{g} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2$ 。于是，相对于原点来说电磁场就具有角动量密度：

• • • • •

$$\mathcal{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2, \quad (1.54)$$

将这个角动量密度对空间积分，我们就可以得到某个区域中的电磁场所携带的角动量。正如能量守恒和动量守恒一样，在电磁场与带电粒子或者物质的相互作用过程中，只有将电磁场的角动量也考虑在内，整个系统的角动量才是守恒的。这方面一个有趣的例子可以参考 [7] 的 §8.2.4 小节。



相关的阅读



这一章主要是对麦克斯韦方程的一些重要的总体性质进行了回顾和总结，类似的内容可以参考 Jackson 的经典著作 [5] 中的导论以及俞允强老师的书 [2] 的第一章。我想这一章的内容对于一个刚刚接触麦克斯韦方程的同学来说可能会觉得略微有些难以掌握。这并没有很大的关系。正如我们开始所说的，这一章是这个课程的一个总纲。这一章中所涉及到的很多内容还会在以后各个章节中更为具体、详细地讨论。所以，只要能够有一个整体的感受就足够了。如果对于矢量分析不是很熟悉的同学可以参考这个讲义后面的附录，那里讨论的数学结论对于我们电动力学课程来说是绰绰有余了（而且也并不很复杂）。

关于电磁学的历史，有兴趣的同学可以参考物理学史的有关书籍，例如《中国大百科全书》的物理卷 [18]。另外对于早期电磁学的发展，特别向大家推荐 Heilbron 的书 [19]。



第二章 静电学

本章提要

- 静电势的泊松方程 (6)
- 导体的边条件和导体组的能量 (7)
- 唯一性与静电镜像法 (8)
- 泊松方程的分离变量法 (9)
- 拉普拉斯方程的数值解法 (10)
- 静电多极展开 (11)

静态的电磁场的研究是电磁学中发展最早、同时也是有广泛应用背景的分支。目前，在各种工程应用中，人们需要计算某些特定条件下的静态电磁场。这些计算中的基本方程是麦克斯韦方程在静态情况下的特例，最为常见的情况就是求解某个区域内的拉普拉斯方程或者泊松方程。虽然方程的形式是简单的，但这并不意味着静态电磁场的计算是一个简单的事情。事实上绝大多数工程电磁场的计算问题中，往往需要较大规模的数值计算。原因就在于这些实际问题中所遇到的边界的形状或者边界条件是比较复杂的。在这一章中，我们将对静电学问题以及解决静电学边值问题的基本方法做一个简要的介绍。

所谓**静态电磁场**，或简称为**静电磁场**，是指所有的场变量都不随时间变化的情形。考察麦克斯韦方程组我们发现，如果所有的场都不随时间变化，那么关于电场和磁场的方程可以完全分离。所以，静电磁场的问题又可以分为**静电问题**和**静磁问题**两大类。本章中我们讨论静电问题，下一章中将对静磁问题进行讨论。

6 泊松方程与静电边值问题

¶ 我们首先考虑均匀、各向同性的线性电介质中的静电问题，设该介质的电容率为 ϵ 。这时，我们只需要麦克斯韦方程组中涉及电场的两个方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

其中的 ρ 表示空间的自由电荷密度。上面的第二个方程说明，静电场是一个无旋场。于是，我们可以引入一个静电势 Φ ：¹

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (2.1)$$

利用 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ，上面的第一个方程就化为：

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon. \quad (2.2)$$

也就是说，静电势 Φ 满足泊松方程。如果所考虑的区域自由电荷密度 $\rho(\mathbf{x}) \equiv 0$ ，那么静电势满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.3)$$

偏微分方程的数学理论告诉我们：一旦给定了自由电荷分布 ρ 和一定的边界条件，方程 (2.2) 或 (2.3) 的解就被唯一地确定了。一旦求出了静电势 Φ ，我们就可以利用公式 (2.1) 来求出空间任意一点的电场 \mathbf{E} 。因此，静电学的基本问题就是求解满足一定边界条件的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ ，这又被称为静电边值问题。

¶ 如果求解泊松方程的问题是在没有边界的无穷大空间中，同时空间中的电荷分布为已知，那么泊松方程的解可以十分简单地写出：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.4)$$

这个公式实际上就是按照库仑定律将空间的电荷分布在某一点产生的静电势线性叠加起来。需要注意的是，这个公式仅仅对于没有边界的情况才是合适的。如果存在边界，那么一般在边界面上会产生额外的电荷分布，而且这些面电荷分布在解出静电势之前是未知的。²因此，仅仅知道体内的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 便不足以确定静电势。

¹注意，由于所有场都不依赖于时间，所以这里的公式 (2.1) 与第一章中关于电磁势的定义式 (1.10) 完全一致。

²这些额外的面电荷分布在求出区域内的静电势 Φ 以后可以简单的由静电势得到。但是在静电势没有求解出来之前，这些面电荷分布也是未知的。

从纯数学的角度来讲，公式 (2.4) 可以利用下面的恒等式来证明：

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \nabla_{\mathbf{x}'}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (2.5)$$

这个数学公式所表达的实际上就是公式 (2.2) 在单位点电荷情形下的特例。

¶ 如果我们考虑的空间区域不是无穷大的，我们就必须考虑边界的影响。考虑一个空间区域 V ，它由一个闭合曲面 $S = \partial V$ 所包围。我们现在要求解区域 V 内满足泊松方程 (2.2) 同时在边界 S 上满足给定条件的静电势 Φ 。这在数学上称为 **边值问题**。在最为简单的情形下，静电势在界面 S 上所满足的边界条件有两类：一类是已知静电势本身在界面 S 上的取值，这称为 **Dirichlet 边界条件**；另一类是已知静电势在边界面上法向偏微商取值，这称为 **Neumann 边界条件**。数学上可以证明：在这两类边条件下，静电边值问题的解是唯一的。这在数学上称为解的 **唯一性定理**。

¶ 在数学中，通常将满足方程 (2.5) 的函数称为拉普拉斯算符的 **格林函数**。确切地说，如果函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 在区域 V 内满足方程：³

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (2.6)$$

同时当 \mathbf{x}' 处于边界面 S 上时，函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 还满足适当的边界条件（参见下面的讨论），我们就称 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为拉普拉斯算符在区域 V 内和相应边条件下的 **格林函数**。利用静电势 Φ 所满足的泊松方程以及格林函数所满足的方程，再根据数学上的 **格林公式**：

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_S dS \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] , \quad (2.7)$$

就可以将区域 V 内静电边值问题的解写成：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) . \quad (2.8)$$

需要注意的是，函数 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 虽然满足格林函数所应当满足的方程，但是它不一定正好满足相应的边条件。因此，一般来说它还不一定是我们所求解的格林函数。我们总可以将区域 V 内的格林函数写成：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') , \quad (2.9)$$

³为了简化公式，我们在本节以下的讨论中都假定了我们所考虑的均匀介质是真空，即 $\epsilon/\epsilon_0 = 1$ 。否则，只需将所得到的静电势乘以 $1/\epsilon$ 即可。

那么函数 $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 在区域 V 内满足拉普拉斯方程:

$$\nabla_{\mathbf{x}'}^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \quad (2.10)$$

也就是说, 格林函数与函数 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 之间可以相差一个该区域内的调和函数。⁴于是, 我们可以选取 $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 以使得公式 (2.8) 所确定的静电势在边界面 S 上面满足相应的边界条件。

对于 Dirichlet 边条件, 为了方便起见, 我们可以选取函数 $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 使得格林函数在边界上恒为零:

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \quad \mathbf{x}' \in S, \quad (2.11)$$

其中我们在格林函数的符号上加上一个下标 D 来表示 Dirichlet 边条件下的格林函数。于是, 在边界 S 上满足 Dirichlet 边条件的区域 V 内静电势为:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'}. \quad (2.12)$$

在 Neumann 边条件下需要注意的是, 我们不能令相应的格林函数的法向偏微商恒为零。原因是格林函数相当于位于区域内 \mathbf{x} 处的一个点电荷。因此, 在该区域中运用高斯定理我们知道:

$$\oint_S dS' \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = -4\pi.$$

因此, 最为简单的选择是令格林函数在边界上的法向偏微商为一个常数:

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = -4\pi/A_S, \quad \mathbf{x}' \in S, \quad (2.13)$$

其中我们用下标 N 来表示 Neumann 边条件下的格林函数, A_S 代表边界 S 的总面积。这样一来, 在边界 S 上满足 Neumann 边条件的区域 V 内静电势为:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}, \quad (2.14)$$

其中 $\langle \Phi \rangle_S$ 代表静电势在边界面上的平均值。

最后需要指出的是, 公式 (2.12) 和 (2.14) 都只是静电边值问题的形式解。只有完全求出格林函数的明显表达式以后, 这两个公式才真正给出边值问题的解, 而求解格林函数一般说来并不是一个更为容易的问题。我们将在第 9.4 小节给出两个这方面的例子。

⁴在某个空间区域内满足拉普拉斯方程的函数被称为该空间内的调和函数。

7 导体的边条件与导体组的能量

¶ 上一节对于静电边值问题的讨论更加侧重于泊松方程的数学性质。我们下面来看一下上节讨论的两类边条件（Dirichlet 和 Neumann）在物理上是如何实现的。就其静电学性质而言，我们可以按照填充某区域的物质的物性的不同，将它们分为下列两类：导体和电介质。⁵ 其中前者是可以导电的，而后者是绝缘体。我们首先讨论一下在理想导体内部的电场以及导体与电介质交界面处的边条件。⁶

¶ 我们将假设导体满足欧姆定律 (1.36) 并且它的直流电导率足够的大以至于可以视为理想导体。于是，如果某个时刻导体内部的电场强度不为零，那么按照欧姆定律，导体内部就会产生强大的电流密度。于是，导体内部的自由电子就会有宏观的流动，从而会影响空间电荷的分布。于是我们看到，这时的电场不可能是静态的。也就是说，当电场达到静态时，导体内部一定没有宏观的电流密度。另一方面，在导体与非导体的交界面上，如果表面的静电势不是处处相等，那么就会造成导体表面的面电荷的宏观移动，从而电场也不可能处于静态。所以我们得到的结论是：

☞ 静电学中，理想导体内部的电场强度恒等于零；导体的表面是一个等电势面；导体上所有的自由电荷只可能分布在导体的表面。

因此，在静电学里，理想导体实际上是用来实现 Dirichlet 边条件的物体。按照我们第一章推导出来的普遍的边条件 (1.39)，我们发现电场在导体表面一定与表面垂直而不可能有非零的切向分量。在导体表面附近作一个“高斯小盒”并利用高斯定律来分析，我们马上发现静电势在导体表面的法向偏微商是与该处的自由面电荷密度联系在一起的：

$$\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\sigma, \quad (2.15)$$

其中我们假定了在导体外部是介电常数为 ϵ 的各向同性的、均匀的、线性电介质。这里的法向定义为从导体的内部指向外部。

¶ 现在考虑由 N 个导体构成的系统，它们之间充满了电介质。为了简化我们的讨论，我们假设这种电介质是各向同性的、均匀的、线性介质，它的介电常数为 ϵ 。设在第 i 个导体的表面的静电势为 Φ_i ，它上面总的电量为 Q_i 。这样的系统称为一个导体组。我们再进一步假定除了导体组的各个导体表面以外，全空间再没有自由电荷的分布。我们希望来计算一下整个导体组的静电能量。

按照第一章关于电磁场能量的普遍公式 (1.43)，导体组的静电能应由下式给出：

$$U = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) .$$

⁵我们将真空看成是一种特殊的电介质，它的介电常数 ϵ_0 。

⁶在静电学这一章中，我们所处理的导体都是指的理想导体。在下面的讨论中，我们就简称它们为“导体”。

上式中的积分遍及全空间，但是由于在各个导体所占据空间中电场 $\mathbf{E} = 0$ ，因此上面的积分实际上只是在各个导体之间的空间进行就可以了。将 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ 代入，我们得到：

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int d^3\mathbf{x} (\nabla\Phi)^2 . \quad (2.16)$$

现在注意到：

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

以及 $\epsilon\nabla^2\Phi = -\rho = 0$ （因为我们假定在各个导体之间的区域没有任何自由电荷的分布），我们得到：

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) .$$

利用高斯公式，这个体积分可以化为在各个导体表面的面积分。另一方面，利用各个导体表面静电势是常数 Φ_i ，同时利用静电势的法向偏微商与面电荷密度之间的关系 (2.15)，我们最终得到：⁷

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i , \quad (2.17)$$

由于静电场满足线性叠加原理，对于一个导体组我们一定有：

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j , \quad (2.18)$$

其中系数矩阵 C 的对角元 C_{ii} 被称为第 i 个导体的 **电容** (capacitance)，而非对角元被称为 **感应系数** (coefficients of induction)。利用导体组的电容和感应系数，导体组的静电能可以表达成：

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j . \quad (2.19)$$

需要注意的是，一个导体组的电容系数并不是只与它们自己的几何参数有关，它还依赖于导体之间的相对位置以及它们之间介质的介电性质。

⁷这里需要小心的是表面法向的定义问题。以导体来看，它的法向单位矢量是由导体指向导体外部的；以导体外的空间来看，它的表面法向单位矢量是由介质指向导体内部；两者相差一个符号。考虑到这一点就不难得到公式 (2.17) 了。

8 唯一性定理与静电镜像法

¶ 前面曾经提到静电边值问题的**唯一性定理**。我们现在具体地将这个定理表达成：

• • • • •

唯一性定理

设空间某个区域 V 的边界为 S ，那么在区域 V 内满足泊松方程 (2.2) 并且在边界 S 上满足 Dirichlet 或 Neumann 边界条件的解 $\Phi(\mathbf{x})$ 必定是唯一的。

这个定理的证明实际上是比较简单的。⁸我们注意到，如果 $\Phi_1(\mathbf{x})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{x})$ 是满足定理中所有条件的两个解，那么函数 $\Psi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) - \Phi_2(\mathbf{x})$ 就在区域 V 内部满足拉普拉斯方程并且它在边界 S 上要么本身等于零 (Dirichlet 边条件)，要么它的法向偏微商等于零 (Neumann)。现在利用等式：

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\nabla\Psi)^2 = \oint_S \Psi(\nabla\Psi) \cdot d\mathbf{S} - \int_V d^3\mathbf{x} \Psi \nabla^2\Psi,$$

我们发现上式的右方的第一项是在边界面上的积分。无论是两种边条件的那一种它都等于零；等式右方的第二项也等于零，因为 Ψ 在区域内满足拉普拉斯方程。于是我们得出结论： $\nabla\Psi = 0$ 。所以，函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 最多只能是常数。对于 Dirichlet 边条件，由于函数 Ψ 是连续函数，同时它在边界处恒为零，于是我们得知函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 在区域 V 内部以及边界 S 上处处为零。对于 Neumann 边界条件，本来所求得解就可以相差一个与物理无关的常数。于是，除去一个与物理无关的常数以外，我们就证明了唯一性定理。

¶ 唯一性定理在静电边值问题中的应用是十分广泛的。假如我们能够利用**某种方法**写出既满足泊松方程又满足边条件的函数，那么唯一性定理保证了我们写出的函数就是相应边值问题的唯一解。利用这个思想，我们来介绍一下所谓的**静电镜像法**。

• • • • •

例题 2.1 点电荷旁的接地导体球 考虑在真空中一个半径为 a 的理想接地导体球 (从而导体球的电势恒为零)，在球外距离球心 $R > a$ 处放一个电量为 Q 的点电荷。现在我们要求解整个空间的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ (参见图 2.1)。

解：从物理上分析，当我们引入点电荷 Q 时，导体球内自由电荷就会重新调整。从宏观上讲，在靠近点电荷的一侧，会有与该点电荷异号的电量堆积，这些静电量会按照一定的分布存在于导体球的表面。由于导体球是接地的，因此与这些电量中和的、也就是与该点电荷同号的静电量会经过接地的导线流向无穷远处。因此可以想见，当系统达到静态时，导体表面的平衡面电荷分布是比较复杂的。但是，这个静电边值问题所满足的边条件是十分简单的：在空间任意一点 (除去导体内部和外部点电荷所在的点) 静电势 Φ 满足拉普拉斯方程；在导体球表面静电势 Φ 满足 Dirichlet 边条件： $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ 。

静电镜像法的处理这个问题的思路是：我们试图用另一个 (当然，如果需要也可以不止一个) 点电荷，我们称之为原先点电荷 Q 的**镜像电荷** 来替代所有导体球表面所产生的

• • • • •

⁸我们这里并没有陈述最为普遍的存在和唯一性定理。但是这个形式对于我们通常所遇到的静电学应用来讲已经足够了。

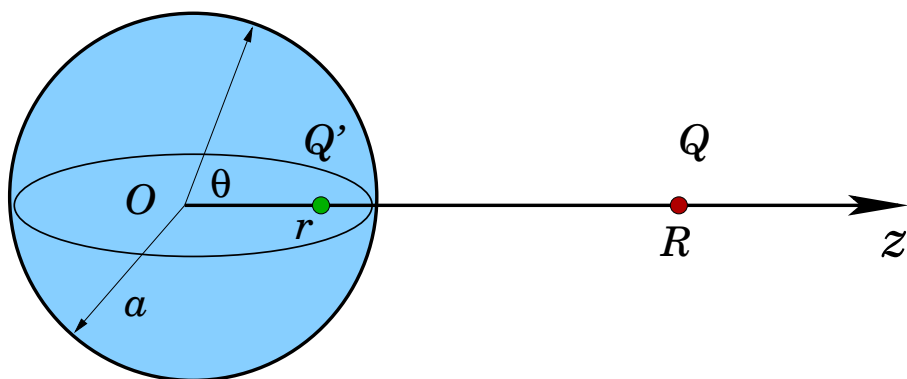


图 2.1: 一个半径为 a 的接理想导体球外距离球心为 R 的地方放置一个电量为 Q 的点电荷。要求解这个静电问题, 就必须在导体球内部距离球心为 r 处引入一个镜像电荷 Q' 。

面电荷分布的效应。这样一来, 导体球外空间的静电势就是原先的点电荷 Q 与镜像电荷所产生的静电势的简单叠加。显然, 镜像电荷不是随便放的。它的电量 Q' 以及它的位置都必须精心设计, 使得镜像电荷 Q' 加上原先就有的点电荷 Q 所共同产生的静电势刚好能够满足边界条件, 即在导体球表面为零。⁹如果我们能够做到这一点, 那么唯一性定理告诉我们, 镜像电荷和原先点电荷叠加的静电势就是这个边值问题的解。

按照对称性, 如果我们能够用一个镜像电荷来替代导体表面的感应面电荷的话, 那么它的位置一定应当放在点电荷 Q 与导体球的球心的连线上。我们假设镜像电荷的电量为 Q' , 而且它距离球心的距离为 r 。利用球面上距离点电荷 Q 最近和最远的点的电势为零的条件, 我们得到下列方程:

$$\frac{Q}{R-a} + \frac{Q'}{a-r} = 0, \quad \frac{Q}{R+a} + \frac{Q'}{r+a} = 0.$$

经过简单的代数运算可以解出:

$$r = \frac{a^2}{R}, \quad Q' = -Q \frac{a}{R}. \quad (2.20)$$

注意, 仅仅得到这个结果我们还没有完全结束。我们还必须验证: 如果我们将满足公式 (2.20) 的镜像电荷与原先的点电荷 Q 的静电势叠加, 那么它们在球面上任意一点 (而不仅仅是最近点和最远点) 产生的电势都是零。这一点请同学们自行验证一下 (需要一点儿平面几何的知识)。经过这个验证, 我们可以说: 这个静电边值问题的解已经完全得到了。整个空间的静电势就是点电荷 Q 以及镜像点电荷 Q' 所产生的静电势的叠加。

利用镜像法求出了静电势以后, 我们还可以求出导体球表面的面电荷分布。我们只需要利用公式 (2.15) 就可以了。具体的计算发现, 如果我们令从球心指向点电荷 Q 的矢量

⁹由点电荷所叠加出来的静电势自动满足拉普拉斯方程, 因此我们只需要它满足适当的边条件就可以了。

为 z 轴, 那么导体球面上一个与 z 轴夹角为 θ 处的面电荷密度为:

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\left(\frac{a}{R}\right) \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)}{\left[1 - 2\left(\frac{a}{R}\right) \cos \theta + \frac{a^2}{R^2}\right]^{3/2}}. \quad (2.21)$$

将这个式子在球面上积分, 就可以得到导体球上所感生的总的电量。得到的结果是: 导体球上感生的总电量正好等于镜像电荷的电量 Q' 。¹⁰需要指出的是: 镜像电荷是一个**虚拟的**电荷, 它的引入完全是为了求解边值问题的方便, 它不是物理上存在的电荷。

真正物理上存在的是那些在导体球表面的面电荷分布。只不过这些面电荷分布在球外空间任意一点所产生的电势可以**等效地**用一个镜像点电荷 Q' 来替代罢了。 搞定

需要指出的是: 静电镜像法不是求解静电边值问题的普遍方法。它只是对于某些特殊的几何位型才能适用, 而我们目前讨论的导体球的问题就是一个最有代表性的例子。另外一个相当重要, 但有时候往往被忽略掉的问题是, 一般来说, 静电镜像法要能够运用有一个要求是所引入的镜像电荷必须位于我们原先要求解方程的区域之外。这样一来, 这些镜像电荷的引入并不会改变我们感兴趣的区域中的方程。比如在上面这个例子中, 我们要求导体球外的静电势, 它除了点电荷所在的点以外, 满足拉普拉斯方程, 在该点电荷附近(无穷近的地方)满足一个点电荷的泊松方程。我们引入的镜像电荷恰好不在球外, 所以它的引入不会改变球外区域的静电势满足的方程。如果这一点不能够得到满足, 那么静电镜像法不能够简单地加以运用。¹¹

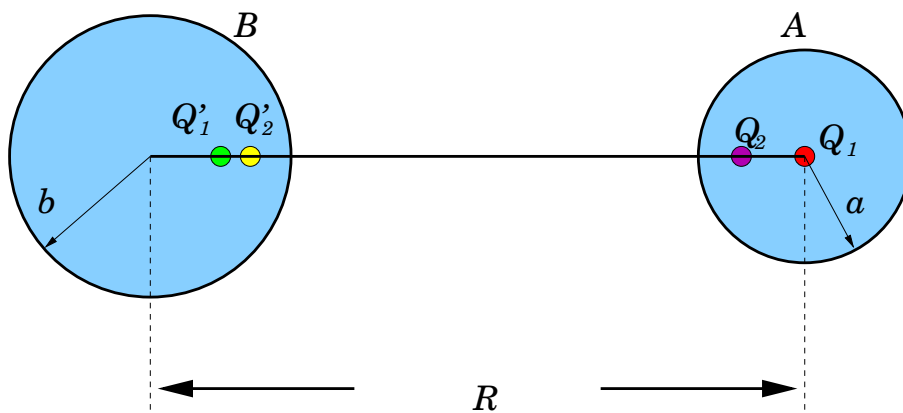


图 2.2: 两个理想导体球构成的系统。为了求出这个系统的电容系数, 就必须分别在两个球的内部引入无穷多个镜像电荷。

我们这里仅仅举出了静电镜像法的一个最典型的例子。在比较复杂的例子中, 有时需要引入不止一个(甚至是无穷多个)镜像电荷。例如考虑如图 2.2 中所显示的情况,

¹⁰这个结果可不是巧合, 同学们可以想想为什么。

¹¹不是说一定不能够用, 而是说一时看不出有什么简单的方法来加以修改和运用。也许这个情况下, 还不如直接求解拉普拉斯方程来得简单。

两个半径分别为 a 和 b 的导体球 A 和 B 相距为 $R > (a + b)$ 。导体球 A 的电势为 1，导体球 B 的电势为零。要求解这个边值问题（这实际上就是求两个导体球系统的电容系数问题），我们就需要首先在电势为 1 的导体球 A 的球心引入一个点电荷 $Q_1 = 4\pi\epsilon_0 a$ ，它能够使得导体球 A 的表面的电势正好为 1。但是这样一来，导体球 B 的表面的电势就不是零了。利用我们上面的例子，我们知道我们必须在导体球 B 内引入一个镜像电荷 Q'_1 ，它能够使得导体球 B 的电势恢复到零。可是现在导体球 A 的电势又不是 1 了。因此，我们必须在球 A 的内部引入适当的点电荷 Q_2 ，它能够使球 A 的静电势恢复到 1。同时，它又会在导体球 B 内派生出镜像电荷 Q'_2 ，等等。这很象在两面相对的镜子前面的一个光源，它在一个镜子内产生镜像，这个镜像又在另一个镜子内产生镜像之镜像，如此往复便产生出无穷多的镜像。我们不在这里详细求解这个问题，有兴趣的同学可以按照上面的思路尝试一下，或者参考 [8] 中的解答。

9 泊松方程的分离变量解法

¶ 正如前面曾经提到的，看似巧妙的静电镜像法实际上是一个十分特殊的方法。它只能运用到一些极为有限的例子当中。处理静电边值问题的最为普遍的方法就是去直接求解静电势所满足的泊松方程。本节中我们就简要回顾一下利用分离变量法求解泊松方程的结果。

给定区域 V 内的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ ，我们的目的是要求解该区域内的泊松方程 (2.2)，同时我们要求解 $\Phi(\mathbf{x})$ 在区域 V 的边界 S 上满足 Dirichlet 或 Neumann 边条件。我们已经注意到：公式 (2.4) 所表达的函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 已经满足区域 V 内的泊松方程，唯一的问题是它并不正好满足所要求的边界条件。于是我们总可以将我们要求的解写成公式 (2.4) 中的函数再加上一个拉普拉斯方程的解。因此，求解泊松方程边值问题的数学问题与求解拉普拉斯方程边界问题是等价的。下面，我们简要回顾一下在 Dirichlet 或 Neumann 边条件下求解区域 V 内的拉普拉斯方程的方法。我们将分为直角坐标、柱坐标、球坐标几个情形来讨论 [13]。我们这里讨论的直角坐标、柱坐标、球坐标的拉普拉斯方程的解具有两方面的意义：第一，当相关的静电边值问题恰好具有（或近似具有）相应对称性的时候，我们可以直接在相应的坐标系中分离变量并求解；第二，由于我们这里涉及的函数都构成一组完备的函数基，因此原则上任何边值问题的解都可以用这些特殊函数来展开。如果能够通过边条件确定这些展开系数，边值问题也就获得了解决。当然，从原则上说，我们还可以讨论其他形式的曲线坐标系（例如椭球坐标系），但是它们的应用往往仅仅局限在十分特殊的情形（例如椭球坐标适合于求解一个椭球体的电容），我们这里就不进一步讨论了。有兴趣的同学可以参考 [11] 中的 §4 节。

9.1 直角坐标中的拉普拉斯方程的解

¶ 在直角坐标系中，拉普拉斯方程的解可以简单地利用分离变量法得到： $\Phi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$ 。函数 X ， Y 和 Z 的形式一定是指数函数或三角函数（纯虚宗量

的指数函数):

$$X(x) \sim e^{k_1 x}, Y(y) \sim e^{k_2 y}, Z(z) \sim e^{k_3 z}, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0. \quad (2.22)$$

参数 k_1^2, k_2^2, k_3^2 的具体的数值必须由边界条件来确定。一般来说, 如果某个方向的边条件是在一个有限的区间内, 这个方向相应的 k_i 往往只能取分立的纯虚数值 (形成驻波); 如果某方向的边条件是在无穷区间上, 则相应的 k_i^2 可以取连续的值。驻波的情形下相应的本征函数是三角函数, 它的正交、归一、完备性由傅立叶级数理论给出; 连续取值情形下的正交、归一、完备则由傅立叶积分变换的性质给出, 这里我们不再赘述。

9.2 柱坐标中的拉普拉斯方程的解

在柱坐标中拉普拉斯方程的解可以分离为: $\Phi(\mathbf{x}) = Z(z)\Phi(\phi)R(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示空间任意一点到 z 轴的距离。容易验证, 方程的解为:

$$Z(z) \sim e^{\pm kz}, \Phi(\phi) \sim e^{\pm im\phi}, R(r) \sim J_m(kr), N_m(kr). \quad (2.23)$$

为了保证静电势的单值性, 参数 m 必须为整数。参数 k 有两类取法:

- 选取 k 为实数, 这时的静电势在 z 方向是指数函数。当 z 方向为无穷的情形下, 为了保持静电势有限, 往往只能选择 $e^{\pm kz}$ 中的一个特定的符号。径向函数 $R(r)$ 这时为标准的贝塞尔函数 (振荡解): $J_m(kr)$ 和 $N_m(kr)$ 。往往需要径向的边条件来确定 k 可能的取值。
- 选取 k 为纯虚数, 这时静电势在 z 方向为振荡的三角函数, 这往往由 z 方向有限区间所加的边条件引起。利用这些边条件可以确定 k 的可能取值。相应的, 径向的函数为虚总量贝塞尔函数 (指数型) $I_m(kr)$ 和 $K_m(kr)$ 。根据径向的边条件, 往往我们只能选取其中合适的线性组合。

与三角函数类似, 柱函数同样具有正交归一、完备等特性。依赖于柱坐标中 r 方向边条件的不同, 这些正交归一完备性的表现也有所不同。例如对于有限区间: $0 \leq r \leq a$ 上的 Dirichlet 边条件, 相应的解的形式为: $J_m(x_{mn}r/a)$, 其中 x_{mn} 为 J_m 的第 n 个非负零点:

$$J_m(x_{mn}) = 0. \quad (2.24)$$

也就是说, 对于有限区间的边条件, 一般解 $J_m(kr)$ 中的波数 k 只能取分立的数值: $k = x_{mn}/a$ 。这点与直角坐标中的情形十分类似 (只不过平面波换成柱面波)。

对于有限区间上的柱面波解, 我们同样有正交归一关系:

$$\int_0^a r J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{m'n'}r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(x_{mn})]^2 \delta_{nn'}. \quad (2.25)$$

而相应的完备性关系则可以写成：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right) = \frac{1}{r} \delta(r - r'). \quad (2.26)$$

这些公式保证任何区间 $[0, a]$ 上满足 Dirichlet 边条件的函数都可以用柱函数 $J_m(x_{mn}r/a)$ 展开。

如果径向的边条件是加在无穷区间上的，那么波数 k 一般可以取连续的值。这时的正交归一关系为：

$$\int_0^{\infty} r J_m(kr) J_m(k'r) dr = \frac{1}{k} \delta(k - k'). \quad (2.27)$$

这个关系定义了所谓的 **汉克耳变换** (Hankel transforms)。将上式的 r 与 k 对换，就得到完备性关系。它们可以与直角坐标中傅立叶积分变换相类比。

9.3 球坐标中的拉普拉斯方程的解

¶ 如果我们要求解的边值问题的边界具有球对称性，那么拉普拉斯方程可以在球坐标中利用 **分离变量法** 求解。这时，边值问题的解可以用所谓的 **球谐函数** 来表达。在球坐标 (r, θ, ϕ) 中，拉普拉斯算符的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2}, \quad (2.28)$$

其中与角度有关的算符 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 被称为 **角动量平方算符**，它的表达式为：¹²

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.29)$$

所谓球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 是算符 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 的本征函数：

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.30)$$

其中 $l = 0, 1, 2, \dots$ 为非负整数，而整数 m 的取值范围是： $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ 。所以对对应于一个固定的整数 l ，共有 $2l+1$ 个 m 的可能取值。球谐函数的 θ 和 ϕ 的依赖也

¹²这个名称是从量子力学里面借用过来的，这里我们完全可以不必管它为什么是角动量的平方。

是分离的，它的明显表达式为：

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.31)$$

其中 $P_l^m(\cos \theta)$ 是所谓的 **连带勒让德函数**。由于在球坐标中一对固定的 θ 和 ϕ 是与一个三维空间的单位矢量 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 一一对应的，所以，为了简化记号，我们又把球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 简记为 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ ，类似的，我们将立体角元 $\sin \theta d\theta d\phi$ 记为 $d\Omega_{\mathbf{n}}$ 或 $d\mathbf{n}$ 。这样定义的球谐函数满足：

$$Y_{l,-m}(\mathbf{n}) = (-1)^m Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (2.32)$$

球谐函数满足一系列非常重要的性质。其中最为重要的就是 **正交归一性**：

$$\int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.33)$$

以及 **完备性**：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi) \quad (2.34)$$

也就是说，任何一个角度的函数都可以展开成球谐函数。利用球谐函数，球坐标中拉普拉斯方程的一般解可以写成：

$$\Phi(r, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (2.35)$$

其中系数 A_{lm} 和 B_{lm} 完全由边界条件确定。我们马上就会看到利用球谐函数求解具体的静电边值问题的例子（见本节后面的例题 2.2）。如果所考虑的问题具有 ϕ 方向的对称性，那么静电势的展开中将只涉及到 $m = 0$ 的球谐函数，这时连带勒让德函数就退化为勒让德多项式。

球谐函数的一个非常重要的应用是用来展开函数： $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ 。注意到这个函数对于 \mathbf{x} 以及 \mathbf{x}' 都满足拉普拉斯方程（除去 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ 的点以外），所以它一定能够展开成 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 和 $Y_{lm}(\mathbf{n}')$ 。按照函数的对称性，这个展开一定也是对于 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 对称的。详细的计算得到的

结果是（更详细推导参见例题 2.4）：

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (2.36)$$

其中 $r_{<}$ 和 $r_{>}$ 分别代表 $|\mathbf{x}|$ 和 $|\mathbf{x}'|$ 中的较小的和较大的值。这个重要结果被称为球谐函数的 **加法定理**。我们会在第 11 节中讨论多极展开时用到它。

• • • •

9.4 例子

¶ 下面我们举几个实例来说明如何利用各种坐标系中分离变量的方法来求解具体的静电边值问题。

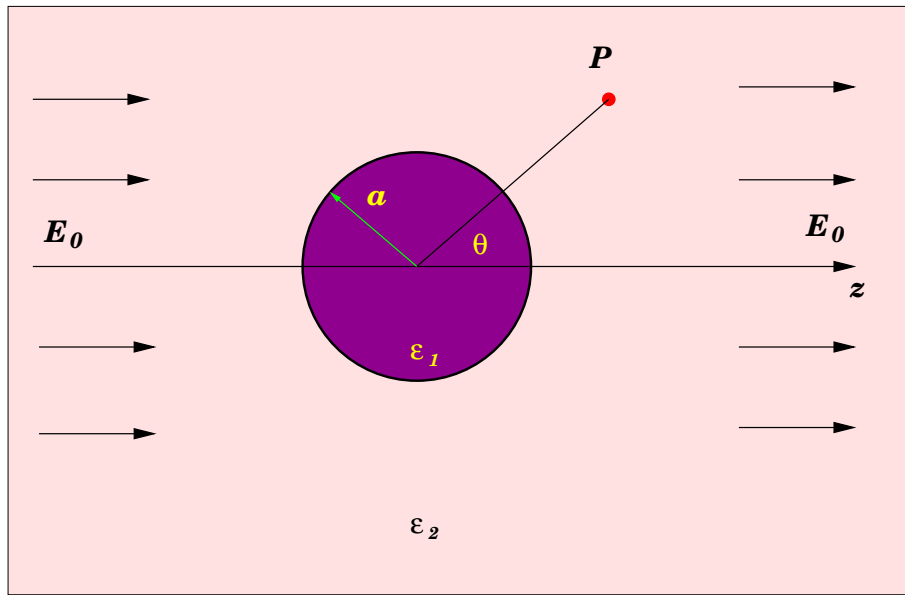


图 2.3: 均匀介质（介电常数为 ϵ_2 ）存在沿 z 方向的均匀电场 E_0 。现在将一个半径为 a 的电介质球（介电常数为 ϵ_1 ）放入，我们需要求解空间任意一点 P 处的静电势。

例题 2.2 均匀场中的介质球 考虑一个均匀的、线性各向同性的电介质构成的球体，其半径为 a ，介电常数为 ϵ_1 ，它处在填满无穷空间的另一种均匀、线性、各向同性的电介质中，其介电常数为 ϵ_2 。在第二种介质中有均匀的、沿 z 方向的电场，电场强度为 E_0 。我们要求解当介电球体放入后空间各点的静电势（参见图 2.3）。

解：显然这个问题适合于在球坐标系中求解。由于空间各点都不存在自由电荷分布，我们得知静电势 Φ 在全空间满足拉普拉斯方程。因此，在电介质球内和外部，我们

可以将静电势写成:

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad \Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) = \sum_l \left(B_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta),$$

其中系数 A_l , B_l 和 C_l 由边条件确定。注意, 由于绕 z 轴的对称性, 我们的解中仅仅涉及 $m=0$ 的球谐函数 (即勒让德多项式)。

下面我们分析一下静电势所满足的边界条件。首先, 在无穷远处电介质球的影响已经消失, 所以在无穷远处一定有:

$$\Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta, \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty,$$

其中为了方便, 我们已经将上式中可能的相加常数取为零。这个条件告诉我们, 所有的 B_l 中只有 $B_1 = -E_0$ 不等于零。由于外场仅仅含有 $l=1$ 的勒让德函数, 所以由它所产生的介质极化一定也只包含 $l=1$ 的分量。也就是说: 只有 A_1 , C_1 和 $B_1 = -E_0$ 不等于零。另外两个非零的系数可以利用在电介质球的表面角坐标为 θ 的位置处电场强度的切向分量连续, 电位移矢量的法向分量连续的事实得到:¹³

$$A_1 = -E_0 + C_1/a^3, \quad \epsilon_1 A_1 = -\epsilon_2(E_0 + 2C_1/a^3),$$

经过简单的代数运算, 我们得到这个方程的解是:

$$A_1 = -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0, \quad C_1 = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 a^3.$$

于是, 我们得到最终的静电势在全空间的解:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) &= -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 r \cos\theta, \\ \Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) &= -E_0 r \cos\theta + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta, \end{aligned} \quad (2.37)$$

这个解表明静电势在球内是一个均匀电场; 在球外它是原先存在的均匀外电场与极化的电偶极矩所产生的电偶极场的叠加。该电偶极子的电偶极矩的大小为:

$$p = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) a^3 E_0. \quad (2.38)$$

作为一个特例, 如果我们令上面所讨论的例题中的参数 $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, 那么考察电介质球表面的边条件我们发现, 这实际上等效于一个均匀外场中理想导体球的边界条件。于是, 无须再解方程我们知道一个理想导体球处于介电常数为 ϵ 的电介质中, 同时加上均匀外电场时的静电势为:

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta, \quad (2.39)$$

这时我们不必考虑球内的静电势, 因为它恒为零。

搞定

¹³这个方程组中的第一个方程来源于电场强度的切向连续, 它也可以看成是电势本身连续。这两者给出同一方程。第二个方程来源于电位移矢量的法向连续。

例题 2.3 两端接地的柱型导体空腔： 一个半径为 a 、长度为 L 的柱型导体空腔的两个端面接地（电势恒为零）。如果它的侧面的电势 $V(\phi, z)$ 为已知函数，写出腔内任意一点的电势。

解： 适合这个问题的解的形式为：

$$I_m \left(\frac{n\pi r}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) .$$

因此我们可以写出电势的级数展开为：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m \left(\frac{n\pi r}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) , \quad (2.40)$$

其中 A_{mn} 和 B_{mn} 为待定系数。利用 $r = a$ 处的 Dirichlet 边条件：

$$V(\phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) . \quad (2.41)$$

以及这些函数的正交归一关系，我们最后得到：

$$\begin{cases} A_{mn} = \frac{2}{\pi L I_m(n\pi a/L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz V(\phi, z) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \sin(m\phi) \\ B_{mn} = \frac{2}{\pi L I_m(n\pi a/L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz V(\phi, z) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \cos(m\phi) \end{cases} \quad (2.42)$$

其中对于 $m = 0$ ，我们需要用 $(1/2)B_{0n}$ 代入级数。

搞定

前面的两个例子涉及的是一般的静电边值问题。下面的两个例子中，我们来讨论柱坐标、球坐标中的格林函数的求解。所谓格林函数，就是在一定的边条件下，点电荷的所产生的静电势问题。在前一小节中，我们给出的球谐函数的加法定理 (2.36) 其实就对应于无边界情形下、球坐标中的格林函数。下面我们就给出求解这类问题的一般思路。

例题 2.4 证明球谐函数的加法定理 (2.36)

无边界的无穷空间中的格林函数为： $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (1/4\pi)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ ，它满足： $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。通过求解这个方程验证前面给出的加法定理 (2.36)。

解： 我们的出发点是三维 δ -函数在球坐标中的表达式：

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') , \quad (2.43)$$

以及球谐函数的完备性关系 (2.34)：

$$\sum_{l,m} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi) . \quad (2.44)$$

很自然地，我们将格林函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 也展开为：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) . \quad (2.45)$$

将上式带入格林函数满足的微分方程, 我们发现 $g_l(r, r')$ 满足:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g_l(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (2.46)$$

只要 $r \neq r'$, 上面这个方程的解就是: $g_l \sim r^l$ 或者 $g_l \sim r^{-(l+1)}$. 考虑到对于固定的 r' , $r \rightarrow 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 时 $g_l(r, r')$ 都要保持有限, 又由于 $g_l(r, r')$ 对于 r, r' 是对称的, 因此我们有:

$$g_l(r, r') = A_l \begin{cases} r^l & r \leq r' \\ r^{-(l+1)} & r > r' \end{cases}. \quad (2.47)$$

根据方程 (2.46), 我们有:

$$\left[\frac{d(r g_l(r, r'))}{dr} \right]_{r=r'+\epsilon} - \left[\frac{d(r g_l(r, r'))}{dr} \right]_{r=r'-\epsilon} = -\frac{1}{r'}.$$

由此我们立刻得到: $A_l = 1/(2l+1)$, 从而证明了加法定理 (2.36).

搞定

例题 2.5 包含一个点电荷的接地柱型导体空腔 考虑一个柱型导体空腔由: $0 \leq z \leq L$, $0 \leq r \leq a$ 围成。其边界接地。空腔内部为真空。在内部柱坐标为 $\mathbf{x}' = (r', \phi', z')$ 处又一个电量为 1 的点电荷。试求腔内各点的静电势。

解: 这其实就是求一个柱型区域内具有 Dirichlet 边条件的格林函数问题。问题的解 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 满足的微分方程为:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.48)$$

按照前面的讨论, 这个问题解一定具有下列形式:

$$J_m(kr) e^{im\phi} e^{\pm kz}, \quad I_m(kr) e^{im\phi} e^{\pm kz}$$

事实上, 从这两个形式出发都可以得到需要的解。虽然两者形式上不太一样, 但是却是相等的。我们这里以第一种形式为例来说明如何获得完全的解。

我们利用柱坐标中 $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 的标准表达式:

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z'), \quad (2.49)$$

以及柱函数 (参见公式 (2.26)) 和三角函数的完备性关系:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \delta(r - r') &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right), \\ \delta(\phi - \phi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

我们可以将腔内的静电势展开为:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(z, z') e^{im(\phi - \phi')} \frac{J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right)}{(a^2/2) J_{m+1}^2(x_{mn})}. \quad (2.51)$$

其中 $g_{mn}(z, z')$ 为一待定函数。将上式代入格林函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 所满足的方程我们发现函数 $g_{mn}(z, z')$ 满足下列常微分方程:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_{mn}^2\right) g_{mn}(z, z') = -\delta(z - z'). \quad (2.52)$$

其中 $k_{mn} = x_{mn}/a$ 。显然, 这个方程的解为指数函数。要保证在 $z = 0$ 处的静电势为零, 我们需要 $\sinh(k_{mn}z)$; 要保证在 $z = L$ 处为零我们却需要: $\sinh(k_{mn}(L - z))$ 。两者似乎矛盾。但是注意到我们需要的是一个格林函数。它对于交换 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 是对称的。因此我们实际上可以用:

$$g_{mn}(z, z') = A_{mn} \sinh(x_{mn}z_{<}/a) \sinh(x_{mn}(L - z_{>})/a), \quad (2.53)$$

来同时满足 $z = 0$ 和 $z = L$ 处的边条件。按照方程 (2.52), 函数 $g_{mn}(z, z')$ 的一阶导数在 $z = z'$ 处有一个跃变:

$$g'_{mn}(z, z')|_{z=z'+\epsilon} - g'_{mn}(z, z')|_{z=z'-\epsilon} = -1. \quad (2.54)$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 。公式 (2.53) 中的函数刚好在 $z = z'$ 处也有跃变。因此我们需要做的就是调节系数 A_{mn} , 使得正确的跃变值刚好被满足。最终的结果是:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')} J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right)}{x_{mn} J_{m+1}^2(x_{mn}) \sinh\left(\frac{x_{mn}L}{a}\right)} \sinh\left(\frac{x_{mn}z_{<}}{a}\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}(L - z_{>})}{a}\right), \quad (2.55)$$

搞定

10 静电边值问题的数值解法

¶ 静电边值问题, 或者具体地说在一定区域中求解拉普拉斯方程的问题, 在实际应用中是经常遇到的。但是, 往往由于边界形状的复杂性、或者由于边界条件的复杂性 (例如, 不是简单的 Dirichlet 或 Neumann 边条件)、或者两种复杂性都存在的原因, 绝大多数实际应用中的静电边值问题是不可能解析求解的 (有许多甚至不能分离变量)。这时, 寻求一种可靠的数值解法就显得尤其重要了。在数学中, 偏微分方程边值问题的数值解法是一门专门的学问。在我们这个课程里面不可能对此给出详尽系统的讨论。详细一些的讨论可以参考 [17] 以及那里所引用的相关文献。

拉普拉斯方程的边值问题的数值求解实际上包含两个基本的步骤: 首先, 我们需要对于所求的问题做分立化的处理, 也就是将原先无穷多自由度的问题化为求解有限多自由度的问题; 其次, 我们需要利用相应的数值算法来求解所得到的、包含有限多自由度的问题。我们将介绍网格法以及利用 Jacobi 算法求解拉普拉斯方程; 随后我们简要介绍有限元方法, 它与网格法的区别主要在于第一个步骤。

10.1 简单的网格法

¶ 我们首先介绍一下经典的 **网格法** 解拉普拉斯方程的基本过程。假设我们需要求解区域 V 内的拉普拉斯方程，这个区域的边界 ∂V 由一些平行于三维坐标平面的平面围成，我们要求的解在边界上满足 **Dirichlet** 边条件。¹⁴ 我们现在将三维空间划分成三维的 **网格**，格距为 a 。假设我们的感兴趣的区域 V 内和边界 ∂V 上只包含 **有限多** 个网格交叉点。我们统称称这些交叉点为 **格点**。处于区域 V 内的这些格点被称为 **内格点**，而处在边界上的那些格点被称为 **边界格点**。我们将我们要求的静电势在每个格点处的值记为： $\Phi(\mathbf{x})$ 。由于静电势满足 *Dirichlet* 边条件，所以它在边界格点上的值是已知的。如果我们能够求出静电势在每个内格点上的值，我们就可以得到一个关于区域 V 内静电势的一个大概的了解。只要我们将格距不断减小，网格更加细致，我们就可以得到区域内静电势的近似解。

在三维空间中如果我们用 **差分** 来代替微分，我们就可以得到拉普拉斯算符的一个近似表达式：

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(\mathbf{x}) \simeq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2} \left(\Phi(\mathbf{x} + \hat{i}) + \Phi(\mathbf{x} - \hat{i}) - 2\Phi(\mathbf{x}) \right), \quad (2.56)$$

其中 \hat{i} 代表沿着 i 正方向的长度为 a 的矢量。由于所有的格点的数目是有限大，所以如果利用上面这个拉普拉斯算符的近似式作用于某一格点的静电势，它得到的是该点的静电势以及与它相邻的六个格点上静电势的线性叠加。换句话说，在分立的网格情形下，所有格点（内格点和边界格点）上的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ 可以看成是一个列矢量，它的维数等于总的格点数目；拉普拉斯算符可以看成是这个矢量空间的一个矩阵（线性变换）。我们要求解的静电势满足： $\nabla^2 \Phi = 0$ 。

¶ 要求解差分形式的拉普拉斯方程，我们可以从 **扩散方程** 出发：

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.57)$$

这个方程的差分形式为（时间也分立化为 $t = n\Delta t$ ，其中 n 是非负整数）：

$$\frac{\Phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \Phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2} \left(\Phi(\mathbf{x} + \hat{i}, t) + \Phi(\mathbf{x} - \hat{i}, t) - 2\Phi(\mathbf{x}, t) \right), \quad (2.58)$$

注意，这个方程可以用来迭代地求出 $\Phi(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ ，只要所有的 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 为已知。一个重要的特性就是：叠代无穷多（在实际计算中是“足够多”）次以后得到的函数： $\Phi(\mathbf{x}, t \rightarrow \infty)$

¹⁴这只是一个简化的假定，并不是必须的。原则上讲边界可以是任意形状的曲面，只不过求解的时候更为复杂罢了。

一定满足拉普拉斯方程。换句话说，拉普拉斯方程的解是扩散方程的一个稳定解。可以证明，为了保证迭代的稳定性，时间方向的间隔 Δt 不能够取太大，它必须满足：

$$6\Delta t \leq a^2 . \quad (2.59)$$

在此条件下，上述的迭代一定会收敛。如果我们取最大的可能的 Δt 的值，那么公式 (2.58) 中的迭代具体形式为：

$$\Phi^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left[\Phi^{(n)}(\mathbf{x} + \hat{i}) + \Phi^{(n)}(\mathbf{x} - \hat{i}) \right] , \quad (2.60)$$

其中，我们已经将时间的依赖写在 Φ 的上标处（例如 $\Phi^{(n)}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, n\Delta t)$ ）。这个迭代公式的形式十分简单：在保持已知的边界静电势不变的情况下，我们可以将内格点处的静电势改变成它的六个近邻格点的代数平均值，如此往复，直到每个内格点的静电势在所要求的精度之内不再变化。这时我们就得到了该区域内拉普拉斯方程的一个近似解。这个方法是一个十分古老的算法，它被称为 **雅可比方法**（Jacobi's method）。它早在十九世纪就已经广为人知了。

需要指出的是，雅可比方法一般并不是求解拉普拉斯方程的最快捷的方法。但是它却是概念上最为直接、数值上也是相当稳定的方法。其他的方法往往都是基于雅可比方法再做适当的改动。¹⁵ 详细的讨论请有兴趣的同学们参考 [17] 以及那里所引的相关文献。

¶ 我们用一个实例来说明这种方法。考虑三维空间中一个稍微复杂一点的边值问题。设想我们在三维直角坐标系的第一卦限中（也就是 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的区域）填满理想导体并将其接地；空间其他区域为真空。现在，我们在第一卦限外的任意一点放置一个电量为 $Q = 1$ 的单位点电荷，我们试图来求解空间的静电势（参见图 2.4）。

首先，这不是一个可以用静电镜像法简单求解的问题。原因就在于如果按照通常的方法引入镜像电荷（例如在点电荷关于三个坐标平面的镜像位置），你会发现有些镜像电荷并不在第一卦限内，因此镜像电荷将影响导体外部的方程。这就使得静电镜像法不能直接应用（见第 8 节的讨论）。我们可以利用雅可比方法来求解这个问题。注意到第一卦限外的静电势总是可以写成点电荷的静电势加上一个拉普拉斯方程的解 $\Phi(\mathbf{x})$ ，而 $\Phi(\mathbf{x})$ 在边界上（与第一卦限的交界面上）满足确定的 Dirichlet 边条件，即它正好等于点电荷 Q 在边界上产生的静电势的负值，从而两者之和满足该边界上总的静电势为零。于是，剩下的工作就是利用计算机来实现上面讨论的雅可比方法，从而求解函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 。有兴趣的同学不妨尝试一下。

¹⁵ 例如，只需要十分轻微的改动就可以实现所谓的 Gauss-Seidel 方法，它一般比 Jacobi 方法快一倍。更为有效的还有所谓的 SOR 方法，参见 [17]。

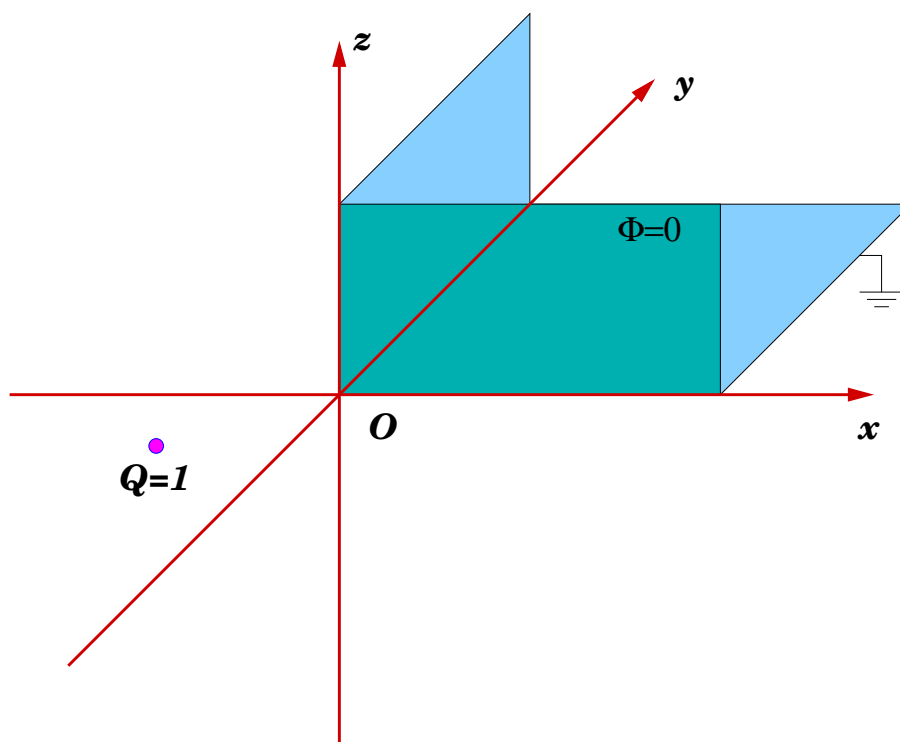


图 2.4: 三维空间的第一卦限填满接地的理想导体, 在其外部任意一点放置一个电量为 $Q = 1$ 的点电荷, 我们需要求解空间任意一点处的静电势。这个问题可以利用数值方法来近似求解。

10.2 有限元方法

¶ 一种比前一小节更为复杂一些的方法是所谓的 **有限元方法** (Finite Element Method, FEM)。有限元方法与网格法的最主要区别在于求解问题的第一步骤, 即如何对原先的问题进行分立化。在有限元方法中, 我们对于待求解区域的划分不是按照均匀的网格来进行, 而是根据实际的需要 (依赖于待求函数变化的快慢、边界的形状等等) 来划分, 而且一般常用的微小单元也不是小立方体 (或长方体), 而是相应维数中的 **单纯形** (simplex)。具体来说, 对于一维问题是线段, 二维是三角形, 三维是四面体。之所以用各个维数的单纯形是因为它们 (与通常的立方网格比较) 可以更好地处理复杂形状的边界。¹⁶ 每一个小的单纯形单元被称为一个 **有限元**。整个待求区域被一系列的有限元所覆盖。这在数学上称为对待求区域对一个 **单纯剖分**。不同的有限元的大小形状通常并不是相同的, 而是根据所求解的问题来具体确定的。因此, 利用有限元方法的第一个步骤就是

¹⁶ 正是由于这个原因, 单纯剖分被广泛应用于电脑图形处理 (一个典型的例子是电脑游戏中)。在电脑游戏中象人物头像这样具有比较复杂边界的物体的显示一般都是利用单纯剖分方法来实现的。你可以想象如果 3D 电脑游戏中人物的头像用立方网格来表现该是多么的杯具!

确立一个合理的单纯剖分方案。

以二维情形为例，对待求区域进行单纯剖分后，覆盖区域的各个有限元（小三角形）的顶点被称为这个剖分的节点（node）如果能够计算出静电势在各个节点处的值（或者其近似值），我们就可以得到静电势在待求区域内的一个分立的近似表达。事实上，我们还可以做得更多。我们不仅仅可以得到静电势在各个分立的节点处的值，我们还可以利用某种内插—其中最常用的是线性内插—给出静电势在区域内每一点处的一个近似表达。例如，考虑二维平面上一个任意的有限元，它的三个节点的坐标分别为： (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ 。假定我们给定这三个节点处的静电势的数值： Φ_i ，那么在有限元内部，我们可以利用线性内插公式：

$$\Phi(x, y) = a + bx + cy, \tag{2.61}$$

其中 (x, y) 是所考虑的有限元（三角形）内部的任意一点。利用静电势在三个节点处点数值，我们有：

$$\Phi_i = a + bx_i + cy_i, i = 1, 2, 3; . \tag{2.62}$$

由此我们可以解出三个系数： a, b, c ：

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \Phi_1 & x_1 & y_1 \\ \Phi_2 & x_2 & y_2 \\ \Phi_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & \Phi_1 & y_1 \\ 1 & \Phi_2 & y_2 \\ 1 & \Phi_3 & y_3 \end{vmatrix}, c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Phi_1 \\ 1 & x_2 & \Phi_2 \\ 1 & x_3 & \Phi_3 \end{vmatrix}, \tag{2.63}$$

其中 D 为系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{2.64}$$

它的数值正好等于相应的有限元（三角形）面积的两倍。将这些表达式带入 (2.61) 我们就得到：

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i x + r_i y) \Phi_i, \tag{2.65}$$

其中各个系数由下式给出：

$$p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, q_1 = y_2 - y_3, r_1 = x_3 - x_2. \tag{2.66}$$

其他的系数可以由上式循环交换 (1, 2, 3) 得到。因此我们看到，只要给定某个单纯剖分的各个节点处的静电势的近似数值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ ，我们就可以得到整个区域内任意一点处的静电势的近似值。我们还可以计算上述静电势对应的电场。由于在有限

元内部静电势线性依赖于坐标，因此电场 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ 在一个有限元内部为常矢量：

$$\mathbf{E}_x = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 q_i \Phi_i, \mathbf{E}_y = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 r_i \Phi_i. \quad (2.67)$$

¶ 如何能够得到一组好的近似值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ 呢？我们知道严格的静电势 $\tilde{\Phi}(\mathbf{x})$ 应当满足拉普拉斯方程或泊松方程。一个更为方便的办法是利用与方程等价的 **最小静电能量** 条件。我们知道，在一定的边界条件下，满足相应拉普拉斯方程的静电势一定是使得该区域上的静电能泛函：¹⁷

$$\mathcal{E}[\Phi] = \frac{\epsilon}{2} \int d^2\mathbf{x} |\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2, \quad (2.68)$$

取极小值。利用这个原理我们就得到一个求解静电问题的 **变分法**。当我们给定某个单纯剖分上各个节点处的静电势尝试值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ 后，由于一个有限元内部的电场为常矢量，见公式 (2.67)，并且该电场线性依赖于有限元的三个结点处的静电势 Φ_i 。所以与尝试静电势 (2.65) 对应的静电能泛函就等于各个有限元上的静电能密度乘以相应的有限元面积，再将所有有限元的贡献相加即可：

$$\mathcal{E}[\{\Phi_i\}] = \frac{\epsilon}{2} \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{E}_f^2 \Delta S_f, \quad (2.69)$$

其中 $f = 1, 2, \dots, N_f$ 标记不同的有限元（假定总共有 N_f 个）， ΔS_f 是有限元 f 的面积。由于每个有限元上的静电能密度是其结点处静电势 Φ_i 的二次函数，因此与尝试静电势 (2.65) 对应的总静电能泛函也是所有 Φ_i 的正定二次型。我们希望寻找的拉普拉斯方程的近似解就对应于上述总静电能泛函的极小值。

为了考虑边条件，我们将一个待求区域的单纯剖分的节点分为 **内部节点** 和 **边界节点** 两大类。对于边界节点来说，与之对应的静电势是给定的（如果是 Dirichlet 边条件）。因此，能量泛函 (2.69) 中需要确定的变量实际上只涉及那些内部节点处的静电势。事实上，我们可以进一步将它写成：

$$\mathcal{E}[\{\Phi_i\}] = \frac{1}{2} \Phi_i \mathcal{A}_{ij} \Phi_j - \mathcal{B}_i \Phi_i + \mathcal{C}, \quad (2.70)$$

这个式子中的指标 i 仅仅涉及内部节点，重复的指标意味着对于所有内部节点求和。矩阵 \mathcal{A}_{ij} 是一个正定的、对称稀疏矩阵； \mathcal{B}_i 是一个矢量。显然这个二次型取极小的条件对应于：

$$\mathcal{A}_{ij} \Phi_j = \mathcal{B}_i. \quad (2.71)$$

¹⁷这里为了与上面的讨论一致，我们写出了二维情形下的静电能泛函。推广到三维是直接了当的。

也就是说，只要确定了系数矩阵 \mathcal{A}_{ij} 以及矢量 \mathcal{B}_i ，我们只需要求解上面的线性方程组，就可以获得需要的解 Φ_i 。 Φ_i 获得了，带入前面的公式 (2.65)，我们就得到了待求区域上静电问题的一个近似解。

一般来说，型如 (2.71) 的方程组可以利用迭代的方法来求解。特别是对于正定的、实对称矩阵，存在很多的数值方法。我们这里就不再继续深入了，有兴趣的同学可以参考 [17] 的相关章节。

11 静电多极展开

¶ 考虑空间原点附近局域的一团电荷分布，我们用函数 $\rho(\mathbf{x})$ 表示它的电荷分布密度。这里所谓的局域是指 $\rho(\mathbf{x})$ 只是在空间有限大的一个区域 V 内才不等于零，而在该区域以外恒等于零。我们现在要求远离这团电荷分布的一点处的静电势。

○ ○ ○ ○

按照公式 (2.4)，在该区域外一点 \mathbf{x} 处的静电势可以写成：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ,$$

其中积分变量 \mathbf{x}' 取值在区域 V 内。现在我们利用前面得到的球谐函数的加法定理 (2.36) 得到：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\int Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \right) \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} ,$$

其中我们利用了前面所说的， \mathbf{x} 是在区域外远处的一点，所以 $|\mathbf{x}| > |\mathbf{x}'|$ 。上式中的积分是一个只与电荷分布有关，而与点 \mathbf{x} 的位置无关的常数。于是，我们可以将远离电荷分布处任意一点的静电势表达成：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} , \tag{2.72}$$

其中系数 q_{lm} 被称为与电荷分布对应的多极矩，它的表达式为：

• • •

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' . \tag{2.73}$$

公式 (2.72) 就称为静电势的多极展开。为了看清多极矩的物理意义，我们利用最低阶的几

个球谐函数的明显表达式得到：¹⁸

$$\begin{aligned}
 q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q, \\
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\mathbf{p}_3, q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\mathbf{p}_1 - i\mathbf{p}_2), \\
 q_{20} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\mathbf{D}_{33}, q_{21} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\mathbf{D}_{13} - i\mathbf{D}_{23}), \\
 q_{22} &= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(\mathbf{D}_{11} - 2i\mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}),
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

其中 Q 是电荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ 所包含的总电量：

$$Q = \int d^3\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}'),$$

\mathbf{p} 是该电荷分布的 **电偶极矩** (矢量)：

• • • •

$$\mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}'\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}'), \tag{2.75}$$

而 \mathbf{D}_{ij} 是该电荷分布的 **电四极矩** 张量：

• • • •

$$\mathbf{D}_{ij} = \int d^3\mathbf{x}'(3\mathbf{x}'_i\mathbf{x}'_j - (r')^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}'). \tag{2.76}$$

根据静电势的多极展开公式我们看到，任意一个局域电荷分布在远离电荷分布区域所产生的静电势可以按照它的多极矩进行展开：贡献最大的是单极矩——也就是总电量——的贡献，它按照 $1/r$ 的形式衰减；随后是电偶极矩的贡献，它按照 $1/r^2$ 的形式减小；再随后是电四极矩的贡献，它按照 $1/r^3$ 衰减。当然，如果需要更为精确的结果，还需要加上电八极矩、电十六极矩等等。需要提醒大家注意的是，一般来说一个带电体系的各个多极矩是依赖于原点的选取的。可以证明，只有体系的最低阶的、非零的电多极矩不依赖于原点位置的选取。

作为一个十分重要的例子，我们发现一个位于原点的电偶极矩在空间任意一点 \mathbf{x} 所产生的静电势和静电场分别为：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} \tag{2.77}$$

这个公式我们将在本课程中多次用到。

需要注意的是：公式 (2.77) 其实还并不完全。我们考虑静电场 \mathbf{E} 在球心位于原点、半径为 R 的一个球体内的积分：

$$\int_{r < R} d^3\mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \int_{r < R} d^3\mathbf{x} \nabla\Phi(\mathbf{x}).$$

¹⁸这些明显的表达式可以参考 [5]。

利用高斯公式，它可以化成在球面上的积分：

$$\int_{r < R} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \int_{r=R} R^2 d\Omega_{\mathbf{n}} \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{n} ,$$

其中 \mathbf{n} 是从球心（原点）指向球面上一点的单位矢量。现在我们假定静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ 是由位于 \mathbf{x}' 处的电荷产生的，于是我们得到：

$$\int_{r < R} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int_{r=R} d\Omega_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} .$$

现在注意到这样一个重要的事实：单位矢量 \mathbf{n} ，如果我们将它的各个分量用球面上的角度表达出来的话，它仅仅含有球谐函数中的 $l = 1$ 的那些函数。因此，如果我们将 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 的加法定理的展开式 (2.36) 代入并积分，也只有 $l = 1$ 的项会留下来，其余的都等于零。现在再注意到：

$$\begin{aligned} \int_{r=R} d\Omega_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \int_{r=R} d\Omega_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \sum_{lm} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \int_{r=R} d\Omega_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \mathbf{n}' , \end{aligned}$$

其中第一行的公式中原本只有 $l = 1$ 的球谐函数，但是我们有意加上了对所有 l 的求和。这是允许的，因为正如我们前面说的：对于 $d\Omega_{\mathbf{n}}$ 积分以后，实际上还是只有 $l = 1$ 的项有贡献。由于加上了所有 l 的求和，于是我们可以利用球谐函数的完备性公式 (2.34) 得到第二行。于是我们最终得到：

$$\int_{r < R} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \frac{R^2}{3\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \mathbf{n}' \rho(\mathbf{x}') , \quad (2.78)$$

其中 $r_{<}$ 和 $r_{>}$ 分别是 r' 和 R 中的较小和较大的一个。

在两种情形下，上面的积分可以进一步化简：一种是电荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ 完全位于球体内，即： $r_{<} = r'$ ， $r_{>} = R$ ，这时我们得到：

$$\int_{r < R} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} , \quad (2.79)$$

其中 \mathbf{p} 是球体内所包含所有电荷分布的电偶极矩。另一种情形是所有的电荷分布都处于球体外，这时： $r_{<} = R$ ， $r_{>} = r'$ ，我们的结果是：

$$\int_{r < R} d^3 \mathbf{x} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \frac{4\pi R^3}{3} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{n}'}{r'^2} \rho(\mathbf{x}') = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{E}(0) . \quad (2.80)$$

因此我们看到，为了能够使得公式 (2.79) 能够保证成立，一个位于原点的电偶极子产生的静电场的正确公式应当再加上一项正比于 δ -函数的项：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right] . \quad (2.81)$$

其中的 δ - 函数保证了电偶极场在包含电偶极矩的空间内的体积分满足公式 (2.79)。这个公式在量子力学中也会用到。

¶ 下面我们讨论一团局域的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 在一个外电场中的静电能的问题。设与外场相对应的静电势为 $\Phi(\mathbf{x})$ ，那么静电能的表达式为：

$$U = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) . \quad (2.82)$$

我们假定电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 只是在 $\mathbf{x} = 0$ 附近才不为零，因此我们可以将外场在 $\mathbf{x} = 0$ 附近展开：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial \mathbf{E}_j(0)}{\partial x_i} + \dots .$$

注意对于外电场 \mathbf{E} ，产生它的源处于无穷远处，因此我们有： $\nabla \cdot \mathbf{E}(0) = 0$ 。所以，我们可以在上面的二阶展开中加上一项： $-\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}(0)$ 。将此式代入静电能的表达式，我们得到：

$$U = Q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \frac{\partial \mathbf{E}_j(0)}{\partial x_i} + \dots . \quad (2.83)$$

所以我们看到，一团任意的局域电荷分布与外电场的的相互作用能量可以表达成总电荷 Q 与电势、电偶极矩 \mathbf{p} 与电场、电四极矩 \mathbf{D} 与电场梯度等等贡献之和。

最后，如果我们考虑两个分别处于 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 的电偶极矩。于是，结合公式 (2.81)，我们得到这两个电偶极矩之间的相互作用静电能为：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right] . \quad (2.84)$$

其中 \mathbf{n} 是从 \mathbf{x}_1 指向 \mathbf{x}_2 的单位矢量。这个式子中，我们已经考虑了带有 δ - 函数的电偶极场。



本章是主要处理的是静电问题。我们的处理是十分简略的，许多十分重要而有趣的问题都没有涉及。比如：我们几乎没有提到二维静电边值问题，以及解析函数和保角变换在二维静电边值问题中的应用。另外，对于三维静电边值问题我们也只是做了一个比较简略的回顾。对这些问题想深入探讨的读者可以参考 [5] 和 [8] 中的讨论。对于专门讨论拉普拉斯方程的分离变量解法以及相关的特殊函数的性质，同学们可以参考 [13]。如果你竟然还嫌不过瘾的话，推荐你欣赏 Whittaker & Watson 的经典名著 [14]（虽然按照现代数学观

点看有些陈旧，但毕竟是经典)。对于拉普拉斯方程的数值解法，我们也只是做了一个简略的介绍。这个方面的内容是十分丰富的。在数值分析中，有大量的相关理论内容；在实际的工程应用中，也存在大量的实际例子，有兴趣的同学可以参考相关的书籍。



第三章 静磁学

本章提要

- 环行电流的磁场与磁矩 (12)
- 磁场的能量与电感 (13)
- 静磁多极展开 (14)
- 磁标势与等效磁荷 (15)

静磁学是一个十分古老的学科，与静电学一样，它也是静态电磁场的一个重要部分。与前面静电学的讨论比较，静磁学有它自己的一些不同点。这种区别中最为本质的一点是自然界中没有单一的磁荷，因此静磁场不会是由一个点磁荷（又称为磁单极）产生的。产生磁场的基本单位是磁偶极子，磁力线一定是闭合的曲线，磁感应强度一定是一个无源场。

¶ 人类对于磁性的早期认识可以追述到公元前。指南针（司南）被认为是古代中国对于世界的重大贡献之一。¹但是对于磁性真正系统的研究应当从十八、十九世纪算起。由于静磁学问题初看起来与静电学问题迥然不同，人们一直认为磁与电是完全不相干的两回事。一直到 1820 年，丹麦物理学家奥斯特（H.C. Ørsted）发现了电流附近的小磁针会发生偏转。随后，法国的几位科学家毕奥（J.-B. Biot）、沙伐（F. Savart），特别是安培（A.-M. Ampère）做了比较系统的实验。他们通过这些实验确立了电流产生磁场的规律。从此，人们不仅认识到电流可以产生磁场，而且还可以定量地计算电流所产生的磁场。从现代物理学的观点来看，历史上人们最先接触到的静磁现象—比如涉及到铁磁体的静磁问题—恰恰是比较复杂的，因为它涉及到铁磁材料的微观性质。这些性质许多是有量子力

¹在欧洲，与磁性有关系的词语都派生于 Magnesia，这原来是马其顿境内的一个山的名字。由于这个山附近盛产一种矿石，该矿石具有吸引铁制物体的能力。所以后来将具有这种性质的物体称为 magnet。

学起源的。相比之下，一个电流产生的磁场恰恰是更为简单的、纯经典的对象。本章中，我们将首先从稳恒电流分布产生的磁场出发，讨论静电学中的基本问题。在随后的第 15 节中我们再讨论永磁体的静磁学问题。

12 环行电流的磁场与磁矩

按照麦克斯韦方程 (1.24)，我们可以引入 **磁矢势** (参见公式 (1.9))： $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。这样一来，考虑静态的情形（所有的场不显含时间），我们发现矢势 \mathbf{A} 一定满足：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} . \quad (3.1)$$

其中我们利用了库仑规范条件： $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，²同时我们假定了空间充满了磁化率为 μ 的线性、各向同性、均匀磁介质。我们看到，矢势的每一个分量都满足泊松方程，产生它的源就是电流密度的相应分量。于是，如果给定空间稳恒的电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ，在无边界的空间的解可以写成：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} . \quad (3.2)$$

需要指出的是，在静磁学中的电流密度分布函数 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 并不是任意的矢量场。电荷守恒的连续性方程 (1.41) 要求：

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (3.3)$$

我们这里讨论的电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 可以包含广义函数 (或者称为分布)。例如，它可以对应于面电流密度和线电流密度 (分别正比于一个一维和二维 δ - 函数)。这时我们可以在形如公式 (3.2) 的积分中运用下面的替换规则：

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \sim \mathbf{K}(\mathbf{x}) dS \sim I d\mathbf{l} , \quad (3.4)$$

其中 \mathbf{K} 为面电流密度， I 为线电流强度。

¶ 如果空间存在不同介质的分界面，那么在两种不同介质的交界面处，磁场必须满足一定的边界条件。这些条件我们在第一章中得到过。它们的一般形式为：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 , \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} , \quad (3.5)$$

其中 \mathbf{n} 为从介质 1 指向介质 2 的单位矢量； \mathbf{K} 为交界面上的自由面电流密度。因此，一旦知道了两种介质中磁场 \mathbf{H} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的本构关系，这些边条件加上磁矢势满足的泊松方程，静磁问题的解原则上就被唯一地确定了。

²注意，在静磁学中库仑规范与洛伦兹规范条件是相同的。

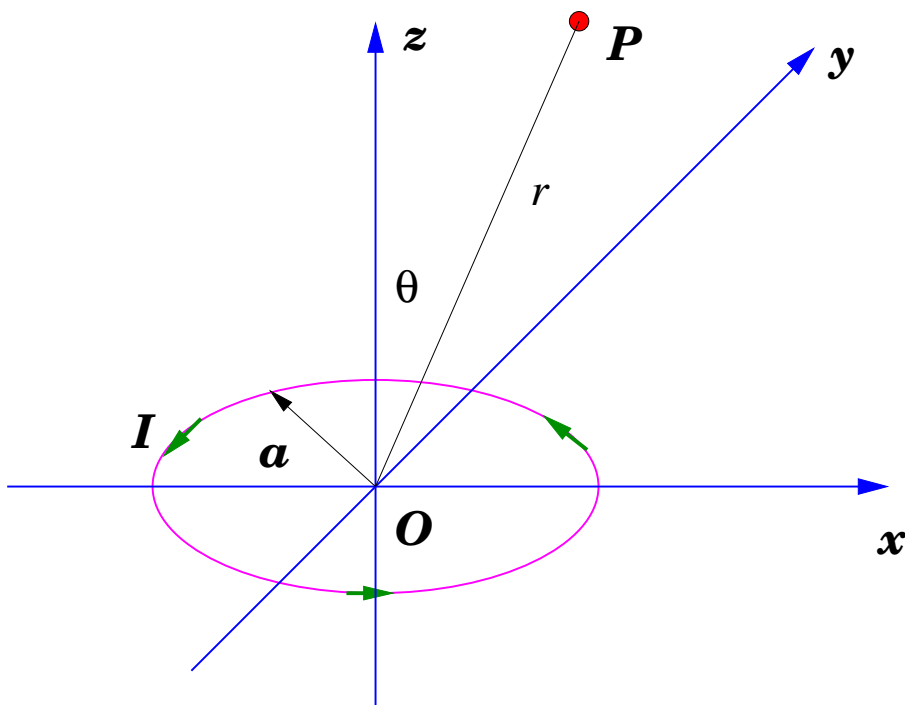


图 3.1: 真空中一个半径为 a 的平面环行电流圈放置在 $z = 0$ 的平面上, 其圆心位于坐标原点。设环内流动的电流强度为 I , 我们要求远离电流环的任意一点 P 处的磁矢势和磁场。

例题 3.1 环行电流的磁矢势 一个电流强度为 I 的环行电流圈的圆心位于坐标的圆点, 它的平面法向指向正 z 方向 (参见图 3.1)。计算该电流圈在空间产生的磁矢势。

解: 首先我们写出电流密度的分布。在球坐标中, 空间的电流密度分布可以写成:

$$\mathbf{J}_\phi(r', \theta', \phi') = \frac{I}{a} \sin \theta' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a), \quad (3.6)$$

其中 a 为电流环的半径; I 是电流环中的电流; 电流密度的其他分量都为零。如果用直角坐标的分量写出来就是:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = -\mathbf{J}_\phi \sin \phi' \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_\phi \cos \phi' \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.7)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 分别代表沿 x 和 y 方向的单位矢量。另一种更直接的方法是利用前面给出的替换规则 (3.4)。无论用哪种方法, 我们都可以发现, 由于问题的对称性空间任意一点的磁矢势与该点的坐标 ϕ 无关。因此, 为简单起见我们取 $\phi = 0$ 。这时磁矢势唯一的非零分量就是 \mathbf{A}_ϕ (直角坐标中的 \mathbf{A}_y)。利用公式 (3.2) 我们发现空间任意一点 P 处的矢势为:

$$\mathbf{A}_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi')^{1/2}}, \quad (3.8)$$

其中 r 是点 P 到原点的距离; θ 是点 P 的位置矢量与 z 轴的夹角。我们已经利用对称性取了 P 点的坐标 $\phi = 0$ 。这个积分可以表达成标准的椭圆积分。如果愿意, 也可以表达成

球谐函数的一个无穷求和 [5]。我们这里不打算写出这个完整的表达式，而只是考虑远离电流圈处矢势的近似行为。

我们来关心远离环行电流处的磁矢势。这时 $r \gg a$ ，于是我们可以将上式的分母进行适当的泰勒展开后得到：

$$\frac{1}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi')^{1/2}} \sim \frac{1}{r} + \frac{a \sin \theta \cos \phi'}{r^2} + \dots$$

这个展开式的第一项代入后积分为零，³ 因此在远离环行电流的任意一点，对磁矢势的领头阶贡献来自展开式的第二项：

$$\mathbf{A}_\phi(r, \theta) \simeq \left(\frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \right) \frac{\sin \theta}{r^2} . \quad (3.9)$$

利用磁感应强度与磁矢势的关系 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，我们得到远离环行电流处的磁感应强度：

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad \mathbf{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}, \quad (3.10)$$

其中我们定义了环行电流的磁偶极矩：

$$m = I \pi a^2 . \quad (3.11)$$

搞定

我们发现公式 (3.10) 所表达的磁场与静电学中一个电偶极子周围的电场形式完全类似，只不过电偶极矩被替换成了磁偶极矩。所以，在无穷远处一个环行电流所产生的磁场的领头阶是一个磁偶极场。在第 14 节中，我们还将更为普遍地证明这个结论。

13 磁场的能量

在这一节中我们来考虑一组闭合电流圈（不一定是圆形）在空间所产生的磁场的能量问题。本节的讨论与静电学一章中第 7 节中的讨论相对应。

考虑一组 N 个闭合稳恒电流回路 C_i ，其电流强度分别为 I_i ，其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。我们假设除了这些电流圈中以外，空间再没有任何的自由电流密度分布。我们进一步假设空间充满了线性、各向同性、均匀的磁介质，其磁导率为 μ 。为了计算这个体系所产生的磁场能，我们从第一章中得到的电磁场能量密度的普遍公式 (1.43) 出发，在静磁学情形下，系统的能量可以写为：

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu} \int d^3\mathbf{x} (\nabla \times \mathbf{A})^2 .$$

³ 第一项在大距离上提供一个正比于 $1/r$ 的势，这相当于磁单极子的势。

上式中的被积函数可以利用矢量分析中的公式进行适当的化简:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_l \mathbf{A}_m) \\
 &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_l \mathbf{A}_m) \\
 &= (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_j \mathbf{A}_k) - (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_k \mathbf{A}_j) \\
 &= \partial_j (\mathbf{A}_k \partial_j \mathbf{A}_k) - \mathbf{A}_k (\partial_j \partial_j \mathbf{A}_k) - \partial_j (\mathbf{A}_k \partial_k \mathbf{A}_j) + \mathbf{A}_k (\partial_j \partial_k \mathbf{A}_j) ,
 \end{aligned}$$

其中在得到第二行时, 我们运用了两个 ϵ_{ijk} 缩并的公式 (A.6); 在得到第四行时, 我们将前面公式中的两项分别凑了一个全微分。现在我们可以将这个式子代入到磁场能量的积分公式中。利用高斯公式 (A.11), 我们发现两个全微分的项都化为无穷远边界上的积分。对局域电流分布所产生的磁场, 在无穷远边界处的被积函数衰减的足够快, 因此全微分的两项对能量没有贡献; 最后一项由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 也没有贡献。于是, 在利用了磁矢势满足的泊松方程后我们得到:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} . \tag{3.12}$$

这就是局域电流分布所产生的磁场能量的表达式。它与静电学中的公式 (2.17) 相对应。

现在我们注意到, 我们的局域电流密度分布只存在于那些电流圈中, 在空间的其他地方 $\mathbf{J} = 0$ 。因此, 公式 (3.12) 中的体积分实际上只要对每个电流圈做线积分就可以了。利用前面给出的替换规则 (3.4), 空间任意一点的磁矢势可以写成:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \frac{I_i d\mathbf{l}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} , \tag{3.13}$$

其中 \mathbf{x}'_i 是电流圈 C_i 上的一点, $d\mathbf{l}_i$ 代表该点处的一个线元矢量, \oint_{C_i} 则表示沿电流圈 C_i 的回路积分。将此式代入公式 (3.12) 中, 我们可将一组电流圈所产生的磁场能写为:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j . \tag{3.14}$$

这个公式中的各个系数 L_{ij} 被通称为 **电感系数**, 其中的对角元 L_{ii} 被称为电流圈 C_i 的 **自感系数**, 或简称为电流圈 C_i 的 **电感**; 非对角元 L_{ij} (其中 $i \neq j$) 则被称为这一组电流圈的 **互感系数**。电感系数的明显表达式为:

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} . \tag{3.15}$$

其中 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 分别是电流圈 C_i 和 C_j 上的点; $d\mathbf{l}_i$ 和 $d\mathbf{l}_j$ 分别代表相应两点处的线元矢量, \oint_{C_i} 和 \oint_{C_j} 则表示沿电流圈 C_i 和 C_j 的回路积分。这些公式与我们静电学第 7 节中的公式相当。

¶ 得到了电流圈的能量表达式, 我们可以考察一下真空中两个电流圈 (称之为 1 和 2) 之间的相互作用力。电流圈 2 作用于电流圈 1 上的力可以写成两个电流圈之间的相互作用能量对第一个电流圈坐标的 **正的** 梯度:⁴

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (3.16)$$

这个公式可以凑上一个全微分写成:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (3.17)$$

这个公式就是安培最先提出的关于两个电流圈之间相互作用力的实验公式。安培进一步将上面的公式拆成两个公式: 一个是关于一个电流元在磁场中受力的公式 (洛伦兹力公式的变种); 另一个是电流元在空间产生的磁场的公式 (Biot-Savart 定律), 正是这些公式奠定了静磁学的基础。

14 磁多极展开

¶ 与静电学第 11 节中静电多极展开的讨论相对应, 这一节中我们讨论一个局域在 origin 附近的稳恒电流分布在远处所产生的磁场以及局域电流分布在 **外磁场** 中的能量、受力、力矩等相关问题。

¶ 磁多级展开

类似于静电学第 11 节中的讨论, 我们来考虑一个局域在 origin 附近的电流密度分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 在远离电流区域所产生的磁矢势。为此, 我们考虑远处任意一点 \mathbf{x} , 它满足 $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, 其中 \mathbf{x}' 是电流密度 $\mathbf{J} \neq 0$ 区域的点。那么我们可以做泰勒展开:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

于是, 在点 \mathbf{x} 处的磁矢势可以近似写成:

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi|\mathbf{x}|} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') + \frac{\mu\mathbf{x}_j}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}')\mathbf{x}'_j + \dots \quad (3.18)$$

为了能进一步化简这个式子, 我们利用下面的矢量恒等式:

$$\int d^3\mathbf{x}' \partial'_i(\mathbf{J}_i(\mathbf{x}')\mathbf{x}'_j) = 0.$$

⁴之所以是“正的”梯度而不是大家所熟悉的“负的”梯度, 是由于这个过程中我们是保持电流不变。可以证明: 如果是保持电流不变, 那么应当是正梯度; 如果是保持磁矢势不变, 则应当是负梯度。详细的讨论可以参考 [11] 以及 [5]。

这个恒等式之所以成立是因为我们可以将等式的左边化为无穷远边界上的面积分，而我们假设了电流分布是局域的，因此在无穷远边界处相应的函数恒等于零。现在注意到，如果我们将上面的恒等式左边括号外的偏微商作用到括号里面去，它将产生两项：一项是正比于 $\partial'_i \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') = \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ （参见公式 (3.3)）；另一项由于 $\partial'_i x'_j = \delta_{ij}$ ，我们得到：

$$\int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') = 0 .$$

也就是说展开式 (3.18) 中的第一项恒等于零。我们注意到第一项在远离电流分布的地方产生的磁矢势正比于 $1/|\mathbf{x}|$ ，即为磁单极势。这一项恒等于零与我们前面提到的不存在磁单极的事实是完全一致的。

所以，在远离电流分布的任意一点的磁矢势的领头贡献来自展开式 (3.18) 中的第二项，它正比于 $1/|\mathbf{x}|^2$ ，是一个磁偶极势。为了看清楚这一点，我们利用：

$$\int d^3 \mathbf{x}' \partial'_k (\mathbf{J}_k(\mathbf{x}') x'_i x'_j) = 0 .$$

这个恒等式成立的原因和上面叙述的相同。于是，将上式中的偏微商具体计算出来并且利用 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 我们得到：

$$\int d^3 \mathbf{x}' (x'_i \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') + x'_j \mathbf{J}_i(\mathbf{x}')) = 0 .$$

利用这个关系，我们可以仅仅保留展开式 (3.18) 的第二项中反对称的部分：

$$\begin{aligned} x_j \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') x'_j &= -\frac{1}{2} x_j \int d^3 \mathbf{x}' [\mathbf{J}_j(\mathbf{x}') x'_i - \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') x'_j] \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j \int d^3 \mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')]_k \\ &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{x} \times \int d^3 \mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] \right]_i . \end{aligned}$$

因此，我们定义电流分布 \mathbf{J} 的 **磁偶极矩** \mathbf{m} （或者简称为 **磁矩**）：

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) . \tag{3.19}$$

容易验证，如果电流分布是位于一个平面内的电流圈（不一定是圆形的），那么我们磁矩的普遍定义 (3.19) 可以表达成：

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{n} , \tag{3.20}$$

其中 S 和 I 分别为该平面环行电流所包围的面积和电流强度， \mathbf{n} 是沿着右手法则所确定的平面电流环的法向单位矢量。

¶ 利用磁矩的定义 (3.19)，并且仅仅保留展开式 (3.18) 的领头阶，我们可以得到下列的磁矢势和相应的磁场：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \simeq \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \right] . \tag{3.21}$$

其中 \mathbf{n} 为 \mathbf{x} 方向的单位矢量。正如我们所说的，这是一个 **磁偶极矢势**，我们上一节中讨论的平面电流环在远处的磁矢势就具有这个形式。

完全类似于静电学中电偶极场的情形（参见公式 (2.81)），在静磁学中一个磁偶极矩产生的磁场也应当包含一个正比于 δ - 函数的修正。在考虑了这个修正后一个位于原点的磁偶极子在空间产生的磁场为：⁵

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.22)$$

¶ 如果电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 是由一系列带电粒子提供的： $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ，其中 q_i ， \mathbf{x}_i 和 \mathbf{v}_i 分别是各个带电粒子的电荷、位置矢量和速度矢量。我们发现这样的带电粒子体系的磁矩可以写为：

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{q_i}{2M_i} \mathbf{L}_i, \quad (3.23)$$

其中 $\mathbf{L}_i = \mathbf{x}_i \times M_i \mathbf{v}_i$ 是第 i 个粒子绕原点的 **轨道角动量**。我们发现，每个运动的带电粒子对于整个系统磁矩的贡献正比于该带电粒子的轨道角动量，其比例系数与粒子的荷质比有关。如果体系中所有粒子的荷质比相同： $q_i/M_i = q/M$ ，我们就得到一个带电粒子系统的磁矩直接与其总轨道角动量成正比的结论：

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2M} \mathbf{L}, \quad (3.24)$$

其中 $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ 为体系的总轨道角动量。粒子的磁矩与角动量之间的密切关联在量子力学中仍然存在，只不过在量子力学中除了有经典对应的轨道角动量之外，粒子还可以具有 **自旋角动量** \mathbf{S} ：

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2M} (g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}). \quad (3.25)$$

两类角动量对于总磁矩的贡献的比例系数一般并不相同。轨道角动量与经典的情形一致（即 $g_l = 1$ ），自旋角动量的贡献则有一个依赖于粒子性质的额外因子 g_s 。⁶

¶ 电流在外场中的力

首先看一下局域电流分布在外磁场中所受的力。按照洛伦兹力的普遍公式 (1.6)，在静磁场中一个局域电流分布所受的力为：

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}(\mathbf{x}'). \quad (3.26)$$

⁵用完全类似于第 11 中的方法可以证明：磁场 \mathbf{B} 在一个包含了所有电流分布的球体内的积分正好等于 $2\mu/3$ 乘以该球体内的电流分布的磁矩。

⁶例如对于电子我们有： $g_s \approx 2$ ，对质子我们有： $g_s \approx 5.58$ ，对 neutron 我们有： $g_s \approx -3.83$ 。

类似于静电学中第 11 节的讨论，我们假设电流分布局域于原点附近，我们将外磁场在原点附近展开：

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{x}') = \mathbf{B}_k(0) + (\mathbf{x}' \cdot \nabla)\mathbf{B}_k(0) + \dots$$

于是，我们可以将电流分布所受的力用分量形式写出：

$$\mathbf{F}_i = \epsilon_{ijk} \left[\mathbf{B}_k(0) \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') + \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' \cdot \nabla)\mathbf{B}_k(0) + \dots \right]$$

完全类似于上一节的讨论，上式方括号中的第一项恒等于零；第二项则可以用电流分布的磁矩来表达。于是我们得到：

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \tag{3.27}$$

其中我们运用了： $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

¶ 电流在外场中的力矩

一个任意电流分布所受到的力矩也可以从洛伦兹力的公式得出。在静磁学中，它的普遍表达式可以写成：

$$\mathbf{N} = \int d^3\mathbf{x}' (\mathbf{x}' \times [\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}(\mathbf{x}')]) \tag{3.28}$$

与力的表达式不同的是，外磁场的展开式中第一项的贡献不等于零。因此，一个局域电流分布所受的力矩主要来自于这一项的贡献。运用类似的推导手法，我们最后得到：

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{3.29}$$

这个公式与静电学中一个电偶极矩在外电场中所受的力矩： $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ 是完全相似的。

¶ 电流在外场中的能量

最后，我们来讨论一下局域电流分布在外磁场中的能量。一个磁偶极子在外磁场中所受到的力 (3.27) 可以看成是这个磁偶极子在外磁场中的势能的负的梯度。于是，我们发现，一个外场中的磁偶极子的势能可以表达成：

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \tag{3.30}$$

这个公式在原子物理之中具有十分重要的应用。在原子物理中，电子的磁矩与外加磁场的相互作用能量就可以写成这个形式。由于量子力学中电子的磁矩与它的角动量成正比而后者是量子化的，因此当原子处于外磁场之中时，原先由于转动不变性而简并的能级会在外磁场中发生劈裂，这就是所谓的塞曼效应。塞曼效应可以用公式 (3.30) 给出的哈密顿量（能量）来描写。它因此也被称为塞曼能。

塞曼效应是由于电子的磁矩与外加磁场的相互作用引起的。考虑到原子核也是有磁矩的，因此即使没有外加的磁场，原子核的磁矩所产生的磁偶极场也会与电子的磁

矩发生偶极-偶极相互作用。原子物理中原子（比如氢原子）能级的所谓 **超精细结构** (hyperfine structure) 就是由这种相互作用引起的。原子核本身具有一定的磁矩： \mathbf{m}_N ；它将感受到核外电子所产生的磁场的相互作用。这个磁场可以看成是电子的自旋磁矩 \mathbf{m}_e （一个磁偶极子）所产生的场再加上由于电子的轨道运动所产生的磁场。因此，超精细结构的相互作用能量可以表达为：

$$\mathcal{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m}_N \cdot \mathbf{m}_e - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_N)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_e)}{r^3} - \frac{e}{m} \frac{\mathbf{m}_N \cdot \mathbf{L}}{r^3} - \frac{8\pi}{3} (\mathbf{m}_N \cdot \mathbf{m}_e) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right).$$

(3.31)

在量子力学的超精细结构的研究中，上述相互作用哈密顿量必须在原子波函数中取平均。例如，在典型的氢原子的基态波函数取平均的结果将仅仅依赖于上式中正比于 δ 一函数的一项。对于氢原子的 $1s$ 态（基态），这个超精细的能量移动给出了天文学上著名的 **21 厘米谱线**。这个谱线是原先二重简并的氢原子的基态，在考虑到电子与核（质子）的磁矩相互作用之后能级分裂为两个，两者的能级差为：

$$\Delta E = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8\pi}{3} |\psi(0)|^2 \langle \mathbf{m}_N \cdot \mathbf{m}_e \rangle,$$

(3.32)

其中 $\psi(0)$ 是氢原子基态波函数在原点的值。注意到电子的自旋与它的磁矩是反平行的（因为它的电荷是负的），所以上述公式意味着核自旋与电子自旋平行的态的能量稍高于两个自旋反平行的状态。对于氢原子来说，超精细结构的能量差很小，大约为： $5.9 \times 10^{-6} \text{eV}$ （远小于氢原子典型的能级差），对应的光的波长恰好接近 21 厘米。这个谱线在射电天文学观测方面具有十分重要的意义。

15 磁标势与等效磁荷

¶ 如果我们处理的空间区域中没有自由电流密度分布，那么静磁学的麦克斯韦方程告诉我们： $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ ，也就是说磁场强度 \mathbf{H} 是一个无旋矢量场。因此我们可以仿照静电学中的做法引入一个 **磁标势** $\Phi_M(\mathbf{x})$ ，它满足：

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi_M(\mathbf{x}).$$

(3.33)

必须强调指出的是，这个方法只有在没有自由电流密度分布的空间可以使用。如果空间存在非零的 \mathbf{J} ，那么一般来说我们只能运用磁矢势 \mathbf{A} 而不能引入磁标势。⁷

⁷一种比较特别的情形是空间只在测度为零的区域存在自由电流（例如只有线电流的情形）。这时虽然也可以在电流为零的空间引入磁标势，但由于线电流的存在，磁标势将不是单值函数。这时，更为保险的选择是不要利用磁标势而是利用普遍适用的磁矢势。

如果我们讨论的问题满足可以引入磁标势的条件，那么磁标势的运用显然比磁矢势要简单。这时候，由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，利用 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ，再将磁标势与 \mathbf{H} 的关系代入，我们发现磁标势满足下列泊松方程：

$$\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{M} . \quad (3.34)$$

这个公式说明，介质中如果存在随空间变化的磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ，那么它为磁标势提供了一个等效的磁荷密度 ρ_M 。类似的，如果在磁介质的边界上，它等效地提供了一个面磁荷密度 σ_M 。它们由下式给出：

$$\rho_M(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}) , \quad \sigma_M(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}) , \quad (3.35)$$

其中 \mathbf{n} 是界面上由磁化的介质指向外面（假定是真空）的单位矢量。这个公式与电学中的公式 (1.15) 完全类似。

需要注意的是，磁标势所满足的“类泊松方程” (3.34) 实际上并不是在所有情况下都是有用的。其原因在于在多数情况下，空间的磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 并不是已知的。它往往是磁场 $\mathbf{H} \equiv -\nabla \Phi_M$ 的函数。这个函数甚至可以是相当复杂的。因此，方程 (3.34) 在表达成单一变量 Φ_M 以后可能很复杂，甚至可以是非线性的。只有在下列两个情形下，方程 (3.34) 才会比较简单：

- 线性介质 的情形。这时磁感应强度 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = -\mu \nabla \Phi_M$ ，于是我们得知磁标势满足拉普拉斯方程（假定介质是均匀的）：

$$\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{x}) = 0 . \quad (3.36)$$

- 硬铁磁体 的情形。如果空间的磁场是由于硬铁磁体产生的，那么空间的磁化强度 \mathbf{M} 几乎不依赖于磁场 \mathbf{H} 的分布。也就是说，可以认为 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 为一个已知的矢量场。于是我们可以利用方程 (3.34) 来求解空间中的静磁问题。

¶ 为了说明磁标势在上述两类静磁问题中的运用，我们来看两个例子。

例题 3.2 磁屏蔽效应 考虑真空中存在的均匀静磁场，其大小为 B_0 ，方向沿正 z 方向。现在我们将一个内外半径分别为 a 和 b 的空心球放入均匀磁场，构成空心球的介质是均匀、线性各向同性磁介质，它的磁导率为 μ 。将坐标原点取为球心，我们现在来求解全空间的磁标势（参见图 3.2）。

解： 我们首先注意到，这个问题中空间没有自由电流密度的分布，所以我们可以利用磁标势来求解。它在全空间满足拉普拉斯方程。这个问题的求解步骤与我们在静电学中例子十分接近。球谐函数的正交性告诉我们：在球外（ $r > b$ ）以及球层内（ $a < r < b$ ）

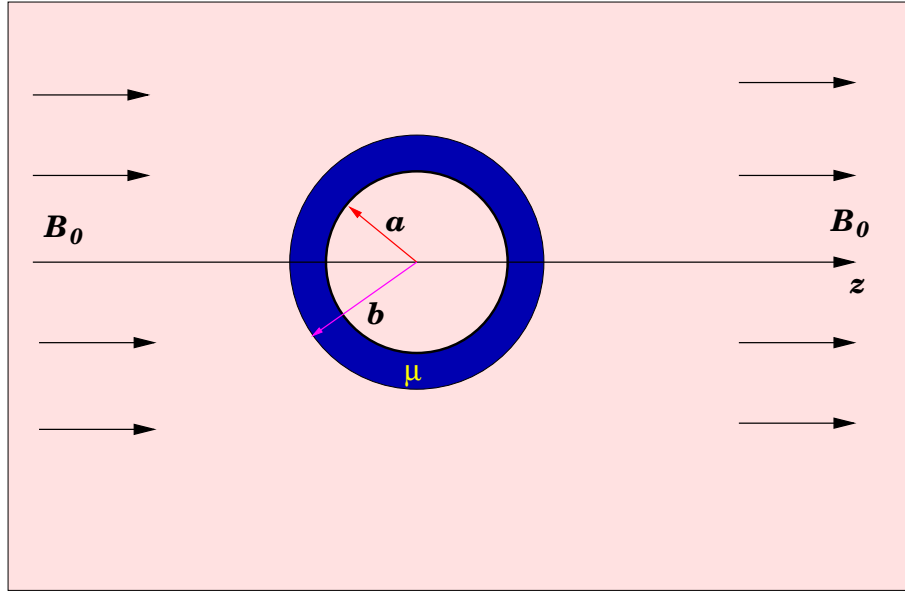


图 3.2: 一个内外半径分别为 a 和 b 的磁介质球壳位于真空中。球壳由磁导率为 μ 的磁介质构成, 球壳内部 (即 $r < a$ 的区域) 也是真空。现在外部空间加上沿 z 方向的均匀外磁场, 大小为 B_0 。我们要求空间任意一点的磁标势。

) 的磁标势一定对应于均匀场加上一个偶极场; 在球内区域 ($r < a$) 磁标势一定对应于一个均匀场。于是, 我们可以写出:

$$\begin{cases} \Phi_M^{(r>b)} = -B_0 r \cos \theta + \frac{A_1 \cos \theta}{r^2}, \\ \Phi_M^{(a<r<b)} = -B_1 r \cos \theta + \frac{C_1 \cos \theta}{r^2}, \\ \Phi_M^{(r<a)} = -D_1 r \cos \theta. \end{cases} \quad (3.37)$$

现在, 我们运用在两个交界面处的边界条件。首先在 $r = b$ 处:

$$-B_0 + \frac{A_1}{b^3} = -B_1 + \frac{C_1}{b^3}, \quad B_0 + \frac{2A_1}{b^3} = \mu' \left(B_1 + \frac{2C_1}{b^3} \right), \quad (3.38)$$

其中 $\mu' \equiv \mu/\mu_0$ 为介质的相对磁导率。而在边界面 $r = a$ 处, 边界条件为:

$$-B_1 + \frac{C_1}{a^3} = -D_1, \quad \mu' \left(B_1 + \frac{2C_1}{b^3} \right) = D_1, \quad (3.39)$$

经过一些初等的代数运算, 我们得到这些方程的解为:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(2\mu' + 1)(\mu' - 1)(b^3 - a^3)B_0}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2}, \\ B_1 = \frac{3(2\mu' + 1)B_0}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2}, \\ C_1 = \frac{-3(\mu' - 1)a^3B_0}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2}, \\ D_1 = \frac{-9\mu'B_0}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2}. \end{cases} \quad (3.40)$$

我们看到, 在球层内部的磁场强度由常数 D_1 给出, 如果构成球层的介质具有非常大的相对磁导率 μ' , 那么在球层内部的磁场大约是 $9B_0/[2\mu'(1 - a^3/b^3)]$, 它反比于 μ' 。也就是说, 如果 $\mu' \gg 1$, 那么球层内的磁场非常小。这个现象被称为 **磁屏蔽**。虽然磁屏蔽与静电学中的静电屏蔽十分类似, 但是从技术角度来说磁屏蔽远没有静电屏蔽有效。由于地球表面总是存在地磁场和其他的磁扰动, 因此要在实验中实现真正的无磁场的环境往往需要十分昂贵的特殊装置。 搞定

¶ 上面这个例子说明的是线性介质的静磁边值问题的解法。我们发现它与静电边值问题的解法十分类似。下面这个例子可以用来说明涉及硬铁磁体的静磁问题。

例题 3.3 均匀磁化的硬铁磁体球 考虑一个均匀磁化的硬铁磁体制成的球体, 它的磁化强度为 \mathbf{M} , 半径为 a 。将坐标原点取为球心并使 \mathbf{M} 指向正 z 方向, 我们现在来求解全空间的磁场。

解: 这是可以利用磁标势来求解的第二类典型问题。在题中所设置的坐标下, $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$ 。由于磁化强度是常矢量, 所以公式 (3.35) 中的体磁荷密度为零而面磁荷密度为: $\sigma_M = M_0 \cos \theta'$, 其中 θ' 为球心到球面上一点的矢量与 z 轴之间的夹角。于是空间任一点 \mathbf{x} 处的磁标势为:

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \int d\Omega'_n \frac{\cos \theta'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.41)$$

现在我们再次利用我们的老朋友 - 球谐函数的加法定理 (公式 (2.36)) - 得到:

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} M_0 a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta, \quad (3.42)$$

其中 $r_{<}$ 和 $r_{>}$ 分别是 a 和 r 中的较小的和较大的一个。具体地说, 如果观察点在球内, 这时 $r_{<} = r$, $r_{>} = a$, 我们发现:

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta. \quad (3.43)$$

利用 $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M$, 我们发现这是一个均匀的磁场并且等于:

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_{\text{in}} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}. \quad (3.44)$$

在球外，磁标势具有典型的偶极子势的形式：

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} M_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (3.45)$$

并且它的磁偶极矩等于： $(4\pi a^3/3)\mathbf{M}$ ，也就是磁化强度乘以球的体积。

搞定



相关的阅读

本章是主要处理的是静磁学问题。从处理的手法来看，许多都是沿袭静电学中发展起来的办法。所以我们的讨论也是大致按照静电学一章的顺序。静磁边值问题在工程中有许多具体运用。例如，研究计算机硬盘的读写过程中，就需要具体而详细地计算硬盘磁头产生的磁场。另一个例子是粒子加速器的设计中，也需要对磁场进行比较精细的计算。在这些具体应用中，静磁边值问题往往是比较复杂的。这时，我们在上一章中所提及的数值计算方法可能是有用的。有兴趣的同学可以参考相关方面的专门书籍。

第四章 电磁波的传播

本章提要

- 电磁波的基本性质 (16)
- 电磁波在介质表面的折射与反射 (17)
- 电磁波在导电介质中的传播 (18)
- 介质色散的经典模型 (19)
- 电磁信号在色散介质中的传播 (20)
- 波导与谐振腔 (21)

电磁波从一开始就伴随着人类的生产和生活。《圣经·创世纪》中说，上帝创造世界做的第一件事情就是创造了光。我们现在知道，光(确切地说是可见光)只不过是处于某个特殊频率范围内的电磁波。但是，人们对电磁波的认识发生革命性的进步却是在麦克斯韦电磁理论之后了。到现在为止，我们对于电磁波的运用可以说到了一个登峰造极的阶段：卫星通信、无线通讯、光纤通讯等等。我们周围的电磁波是如此丰富，以至于人们开始担心电磁波是否已经开始给人类造成**电磁污染**了。一个比电磁污染更为极端的例子是现代战争中所谓**电磁炸弹**的运用。这类武器可以在短时间内发出极强的电磁波脉冲，从而有效地破坏敌方的电磁通讯和计算机设施。

关于电磁波的问题，一般总可以将其归为**产生**、**传播**和**接收**等三个基本过程类别。电磁波的接收主要是一个工程技术的问题，因此我们的课程不会涉及，有兴趣的读者可以参考相关方面的书籍；宏观领域的电磁波的产生和发射问题我们将在下一章中简要讨论。微观粒子辐射的电磁波则要等到相对论的讨论之后在第八章中介绍。这一章中我们将首先讨论电磁波在各种介质中传播的基本物理问题。由于电磁波如此广泛的应用，我

们不可能在一章之中将电磁波传播的所有磷磷总的性质都给出详尽的讨论，我们将只涉及电磁波在几种典型的介质（线性非耗散介质、导体、波导、谐振腔）中传播的最基本和普遍的性质。更为详尽的讨论，读者可以参考有关方面的专著。

16 均匀平面电磁波的基本性质

¶ 麦克斯韦方程告诉人们，电磁场是一个可以自我支撑^{○○○}的动力学系统，它不再需要依附于任何介质而可以在真空中传播，¹这一点我们在第一章中就已经看到了。那里我们得到了电磁势满足的波动方程。利用电磁势与电磁场的关系可以轻易地证明：在没有电荷和电流密度分布的空间，电场矢量和磁场矢量本身也满足同样的波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

其中我们假定空间存在电容率和磁导率分别为 ϵ 和 μ 的均匀线性介质。波动方程的解中最为基本的形式是所谓的均匀平面电磁波。它的形式可以表达为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (4.2)$$

其中我们将电磁场的波动部分用复的指数来表达，波动部分的任意常数相因子则被吸收 在波的矢量振幅之中，这样电磁场的振幅 \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 原则上也都是复矢量。我们在讨论与电磁波有关的现象时总是假设：

波场的复表示

任何真实的实物理量都由其复数表示形式的实部给出。

¶ 均匀平面电磁波之基本性质

麦克斯韦方程告诉我们，我们写出的均匀平面电磁波解中波矢 \mathbf{k} 一定与场的振幅垂直。同时，电磁场的复振幅之间也相互垂直并满足：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad (4.4)$$

其中 \mathbf{n} 为波矢 \mathbf{k} 方向的单位矢量。因此我们看到，均匀平面电磁波的波矢、电场强度和磁感应强度构成相互垂直的一个坐标架。另外，要使方程 (4.2) 满足波动方程，我们必须有：

$$k^2 \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mu\epsilon\omega^2. \quad (4.5)$$

¹这一点实际上在麦克斯韦的年代还没有真正认识到。当时人们认为电磁波需要在一种特殊的介质中传播，这种特殊的介质就是所谓的以太。但是，后来的实验以及狭义相对论的产生宣告了以太论的破产。

这意味着平面波的相速度（也就是平面波中位相保持相同的点在空间移动的速度）为：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}, \quad (4.6)$$

其中的 n 称为该介质的折射率。² 对于非色散介质，其折射率几乎与频率 ω 无关。这时将平面波解 (4.2) 进行线性叠加就可以写出波动方程的通解。例如对于一维的情形，这些解一定具有行波解的形式： $g(x - vt) + f(x + vt)$ 。这个通解的重要特性是波的形状在波的传播过程中不变。但对于色散介质，这时 $\mu\epsilon$ 与频率 ω 有关，叠加出来的解就不再是保持波形的行波解了。有关这方面的更详细的讨论，参见第 20 节。

¶ 偏振性质

为了更为明确地表示电磁波作为矢量波的行为，我们可以引入三维空间的三个实单位常矢量：一个是沿波矢 \mathbf{k} 方向的 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_3$ ；另外两个在垂直于 \mathbf{n} 的平面内，我们记为： \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 ，它们满足：

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}. \quad (4.7)$$

于是，电场强度的复振幅就可以用 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 展开：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (4.8)$$

其中的系数 E_1 和 E_2 都可以是复数。随着 E_1 和 E_2 之间的关系不同，我们称电磁波处于不同的偏振状态。一般来说， E_1 和 E_2 的复相角是不相同的（也就是说两者之比不是实数）。可以证明，一个任意的由 (4.8) 所描写的平面电磁波，如果我们在空间中一个固定点，面对着电磁波传播的反方向来看，其电场矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 一般将随着时间的推移描出一个椭圆。这时，我们称该均匀平面电磁波是椭圆偏振的。如果 E_1 和 E_2 的复相角相同，我们称这样的均匀平面电磁波为线偏振的。如果比值 $E_2/E_1 = \pm i$ ，我们则分别称该均匀平面电磁波为左旋或右旋圆偏振的。³ 对于圆偏振的情形，引入下列的复单位矢量是方便的：

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2). \quad (4.9)$$

它们满足下列重要正交归一关系：

$$\mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} = 0, \quad \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} = 1. \quad (4.10)$$

²这又是一个相当不幸的记号。在电磁波的传播中，我们通常用 \mathbf{n} 表示电磁波波矢方向的单位矢量；但是又用 n 来表示折射率。

³左旋和右旋圆偏振的定义并不是十分统一。我们这里采用的定义是这样的：如果我们面对正入射的电磁波来看，它的电场强度矢量 \mathbf{E} 的旋转方向是逆时针方向的，我们就称之为左旋的；反之则称之为右旋的。用光子的语言来说，左旋偏振光的光子具有正的螺旋度 (helicity)，即它的角动量沿着传播方向的投影为 +1（参见 Jackson [5] 的习题 7.27）。

一个任意偏振的平面电磁波既可以用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ；也可以用 \mathbf{e}_\pm 来展开。

在描写电磁波的偏振性质时常常引入所谓的 **斯托克斯参数** (Stokes parameters)。以线偏振为例，如果我们令：

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} = a_1 e^{i\delta_1}, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} = a_2 e^{i\delta_2}, \quad (4.11)$$

其中 a_1, a_2 为相应复数的模 (正实数)； δ_1, δ_2 为相应幅角。我们可以定义下列的斯托克斯参数：

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad s_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad (4.12)$$

$$s_3 = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1), \quad s_4 = 2a_1 a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1). \quad (4.13)$$

显然，上述四个 Stokes 参数并不是独立的，它们满足： $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ 。这些参数是实验上可以直接测量的物理量。通过对它们的测量就可以确定平面电磁波的偏振性质。

¶ 能流

伴随着电磁波的传播有能量的传输。我们知道电磁场的能流密度由所谓的玻印廷矢量给出 (参见第 5 节)。对于均匀平面电磁波，真实的玻印廷矢量也是随着时间变化的。它的时间平均值代表了在一个周期中平均通过的能流。它由下式给出：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{n}. \quad (4.14)$$

所以我们看到，时间平均的效果是有静能流沿波矢 \mathbf{k} 的方向传播 (所以阳光能给我们带来温暖)。类似的，我们也可以计算出空间能量密度在一个周期内的时间平均：

$$u = \frac{1}{4} \left[\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right] = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (4.15)$$

由于沿着单位矢量 \mathbf{n} 方向传递的能流密度矢量可以写为： $\mathbf{S} = uv\mathbf{n}$ ，其中 v 是能量流动的速度；因此将上述两个公式比较我们就得到均匀平面电磁波中能量流动的速度是： $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/n$ ，即恰好与电磁波的 **相速度** 相同。注意这个结果仅仅对于单色均匀平面电磁波是正确的。我们后面会多次看到，一般来说电磁波能量流动的速度并不一定与其相速度相同。

17 电磁波在介质表面的折射与反射

¶ 这一节中我们处理电动力学课程中最为痛苦而又不能不讲的内容，⁴也就是电磁波在两种非导电介质表面的反射和折射的问题。

⁴纯属个人观点，供大家批判用。

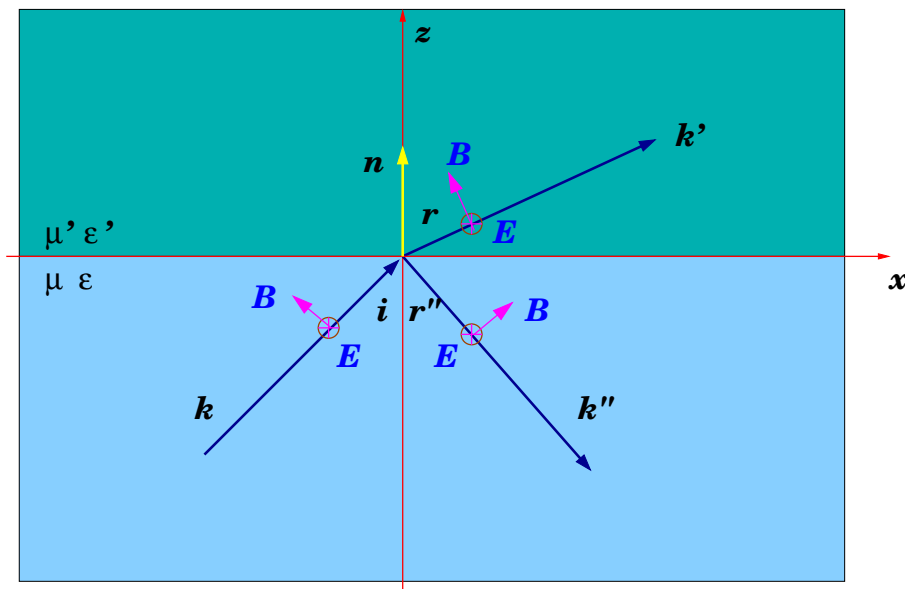


图 4.1: 电磁波在两种介质表面的反射和折射示意图。两种介质分别具有介电常数、磁导率 ϵ, μ 和 ϵ', μ' 。入射电磁波的波矢与界面的法向位于 xz 平面内。本图显示的是电场强度与入射面垂直的偏振情况。

为此，我们考虑两种均匀、各向同性的线性介质，它们的介电常数和磁导率分别为 ϵ, μ 和 ϵ', μ' 。它们分别填充了 $z < 0$ 和 $z > 0$ 的空间，也就是说两种介质的交界面是 xy 平面。我们将两种介质分界面的法线方向的单位矢量 \mathbf{n} 取为沿着 $+z$ 方向。我们会用到两种介质的 **折射率**，它们的定义是：

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}, \quad n' = \sqrt{\frac{\epsilon'\mu'}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (4.16)$$

我们假设有一均匀平面电磁波从具有折射率 n 的介质中入射到两种介质的分界面上。为了方便，我们取入射电磁波的波矢 \mathbf{k} 位于 xz 平面内。矢量 \mathbf{k} 与单位法矢 \mathbf{n} 构成的平面被称为 **入射面**，两者之间的夹角 i 被称为 **入射角**。在两种介质的分界面处会出现电磁波的反射和折射。我们将反射波的波矢记为 \mathbf{k}'' ，它与负的法向 $-\mathbf{n}$ 之间的夹角 r'' 被称为 **反射角**；折射波的波矢记为 \mathbf{k}' ，它与法向 \mathbf{n} 的夹角 r 被称为 **折射角**。我们还将用 $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'$ 和 $\hat{\mathbf{k}}''$ 来分别表示相应三个波矢方向的单位矢量（参见图 4.1 和图 4.2）。

于是，我们可以写出入射、折射和反射电磁波的电磁场：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{E}', \\ \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{k}}'' \times \mathbf{E}'' . \end{cases} \quad (4.17)$$

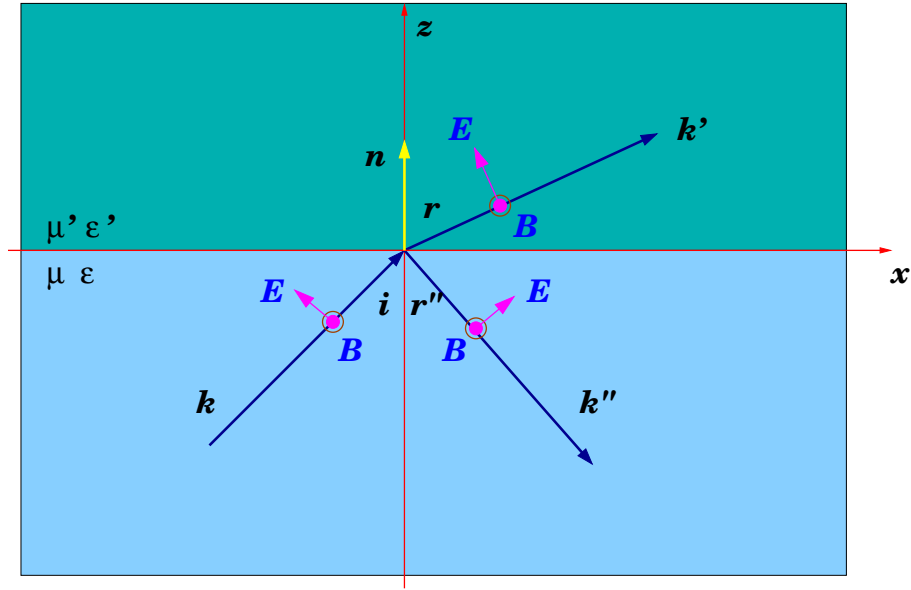


图 4.2: 电磁波在两种介质表面的反射和折射示意图。两种介质分别具有介电常数、磁导率 ϵ, μ 和 ϵ', μ' 。入射电磁波的波矢与界面的法向位于 xz 平面内。本图显示的是电场强度与入射面平行的偏振情况。

三种不同的电磁波的波矢大小是与电磁波的频率以及所在介质的折射率直接联系的：

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| = k = n \frac{\omega}{c}, \quad |\mathbf{k}'| = k' = n' \frac{\omega}{c}. \quad (4.18)$$

在两种介质的交界面处电磁场要满足一定的边界条件。这些边界条件必须在任意时刻、同时在 $z = 0$ 平面上的任意一点都得到满足。这就要求三种波的相因子必须在 $z = 0$ 平面上时时处处相等：

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}$$

这个式子可以用来说明三个波矢实际上都处于一个平面（也就是入射面 xz 平面）之内。对于反射波它给出入射角 i 等于反射角 r'' 而对于折射波它正好给出著名的 **Snell 定律**：

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n}. \quad (4.19)$$

其中 i 和 r 分别表示入射角和折射角。

¶ 现在我们可以运用电磁场在两种介质交界面处所应当满足的边界条件。对于目前的

情况，它们可以表达成：

$$[\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon'\mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.20)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0, \quad (4.22)$$

$$\left[\frac{1}{\mu}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' \right] \times \mathbf{n} = 0. \quad (4.23)$$

上述四个方程分别来自于 \mathbf{D} 的法向、 \mathbf{B} 的法向、 \mathbf{E} 的切向和 \mathbf{H} 的切向连续条件。

将电场垂直于入射面的分量和平行于入射面的分量分开讨论是比较方便的。我们首先讨论电场 \mathbf{E} 垂直于入射面的分量（也就是电场 \mathbf{E}_0 的 y 方向分量） $(\mathbf{E}_0)_\perp$ 。这时的偏振情况如图 4.1 所示。公式 (4.20) 只涉及电场的平行分量；对电场的垂直分量公式 (4.21) 和公式 (4.22)（在用了 Snell 定律后）是等价的；它们和公式 (4.23) 给出：

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_0)_\perp + (\mathbf{E}_0'')_\perp - (\mathbf{E}_0')_\perp &= 0, \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [(\mathbf{E}_0)_\perp - (\mathbf{E}_0'')_\perp] \cos i - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} (\mathbf{E}_0')_\perp \cos r &= 0. \end{aligned}$$

于是我们可以解出电场振幅的垂直分量之比：

$$\frac{(\mathbf{E}_0')_\perp}{(\mathbf{E}_0)_\perp} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}, \quad \frac{(\mathbf{E}_0'')_\perp}{(\mathbf{E}_0)_\perp} = \frac{n \cos i - \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}. \quad (4.24)$$

我们这里特别提请大家注意的是，这些公式中除了出现两种介质的折射率之外，还出现它们的磁化率之比（换句话说，介电常数和磁化率分别出现在公式中，而不仅仅是以折射率的组合出现）。但是，至少对于可见光频率段，多数介质都可以近似地认为 $\mu/\mu' \simeq 1$ ，于是上面公式中将仅仅出现介质的折射率。

对于电场振幅平行于入射面的分量（如图 4.2 所示），公式 (4.21) 根本不涉及；公式 (4.20) 和公式 (4.23) 等价（同样利用 Snell 定律）；它们和公式 (4.22) 给出的解为：

$$\frac{(\mathbf{E}_0')_\parallel}{(\mathbf{E}_0)_\parallel} = \frac{2nn' \cos i}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i + nn' \cos r}, \quad \frac{(\mathbf{E}_0'')_\parallel}{(\mathbf{E}_0)_\parallel} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i - nn' \cos r}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i + nn' \cos r}. \quad (4.25)$$

公式 (4.24) 和公式 (4.25) 被统称为 **菲涅耳公式** (Fresnel's equations, 1812)。

作为一个特例，如果是正入射（即 $i = 0$ ）的情形，那么公式 (4.24) 和公式 (4.25) 等价，我们就得到一个十分简单的结果：

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{2\mathbf{E}_0}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon} + 1}}, \quad \mathbf{E}''_0 = \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon} - 1}}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon} + 1}}, \quad (4.26)$$

¶ 从公式 (4.25) 看出, 对于反射波的振幅来说, 如果入射波的入射角正好等于所谓的布儒斯特角 (Brewster's angle) i_B 的时候, 反射波的电场平行分量等于零, 其中布儒斯特角满足:

$$i_B = \tan^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right). \quad (4.27)$$

也就是说, 这个时候无论入射电磁波的偏振方向如何, 反射波中电场的平行于入射面的分量都将是零, 从而反射波的偏振方向就会完全垂直于入射面。根据公式 (4.25) 还可以看出, 即使是入射角不正好等于布儒斯特角, 在反射波中的电场平行于入射面的分量也会被较大幅度地减小。这就解释了为什么不偏振的自然光经过反射以后, 其反射光往往具有较高的偏振度。利用这个事实, 人们制造了汽车驾驶员专用的墨镜, 它可以有效地减少对面来车的前挡风玻璃所反射的阳光。

另外一个值得一提的现象就是全反射, 它发生在电磁波从较大折射率介质 (光密介质) 入射到较小折射率的介质 (光疏介质) 表面时。按照前面得到的 Snell 定律, 如果 $n > n'$, 那么就会存在一个角度 i_0 , 我们称它为全反射角, 它使得折射角 $r = \pi/2$:

$$i_0 = \sin^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right). \quad (4.28)$$

如果入射角等于 i_0 , 那么折射波将沿界面传播, 因此将没有能量流入折射率较小的介质内部。如果入射角比上述的全反射角还大, 那么折射角的余弦将变成纯虚数:⁵

$$\cos r = i \sqrt{\left(\frac{\sin i}{\sin i_0} \right)^2 - 1}.$$

于是, 折射波的相关因子中将会出现沿 z 方向指数衰减的因子:

$$e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} = e^{-k' |\cos r| z} e^{ik' (\sin i / \sin i_0) x}.$$

因此, 如果入射角大于全反射角, 折射波将会在 z 方向上指数衰减, 无法进入折射率较小的介质, 它将沿分界面传播。读者可以用前面的公式 (4.24) 和公式 (4.25) 来验证这时反射波与入射波振幅之比仅仅是一个相因子。也就是说, 反射波振幅的模方与入射波相等, 但是反射波相对于入射波而言可以有一个相位的改变。

18 电磁波在导电介质中的传播

¶ 这一节中我们来讨论电磁波在导电介质中的传播问题。为了简化我们的讨论, 我们将假设我们研究的导电介质是均匀、各向同性的, 同时它满足欧姆定律。对电磁波而言, 导电介质与非导电介质的重大区别就是电磁波在导电介质中会引起自由电流从而出现耗

⁵这里我们用的符号似乎有些容易引起混淆。下面这个公式中根号前面的 i 表示虚数单位; 而 $\sin i$ 中的 i 则表示入射角!

散，电磁波的能量会转换成导电介质中的焦耳热。因此，最重要对区别来自于麦克斯韦方程中的安培-麦克斯韦定律。如果假定所有的场都是简谐地依赖于时间，我们得到：

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \left(\epsilon_b + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} , \quad (4.29)$$

其中 ϵ_b 和 μ 是该导电介质中通常的介电常数和磁导率，它们仍可能是频率 ω 的函数。与非导电介质中的相应方程比较，我们发现可以将上面公式中圆括号内的量看成是导电介质的 **复介电常数**：

• • • • •

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} . \quad (4.30)$$

如果我们令所有场具有平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$ 的形式，我们得到波矢的平方满足：

$$k^2 = \mu\epsilon_b\omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_b} \right) , \quad (4.31)$$

这个式子表明：如果我们假设介质的 $\mu\epsilon_b$ 基本上是实的，只要电导率 $\sigma \neq 0$ ，那么电磁波的波矢 k 以及频率 ω 不可能都是实数。我们下面将针对两种典型的情况进行讨论。

- 一种情况是在某个初始时刻 $t = 0$ ，导体中已经存在某个真实的电磁场分布，它可以按照三维空间分解为具有 **实的** 波矢 \mathbf{k} 的平面波之叠加。这时满足上面公式的频率 ω 则必须是复数，频率的虚部代表了导体中的电磁场是随时间指数衰减的。这也十分好理解，由于存在欧姆电流，所以 $t = 0$ 时刻存在的电磁场以及与之相对应的能量随时间不断转换为焦耳热，导致导体中电磁场的振幅随时间指数衰减。
- 另一种常见的情况是外界有电磁波入射到导体的情形。这时导体内的场的时间依赖是 **不衰减** 的简谐振荡，即 ω 为实数。此时电磁波的波矢 k 必须是复数。虽然能量仍然会转化为焦耳热，但是由于外面入射的电磁波可以源源不断带来能量，所以导体内任意一点的电磁场随时间仍然可以维持不衰减的简谐振荡。对于复的波矢我们通常令：

$$k = k_1 + i \frac{k_2}{2} , \quad (4.32)$$

其中 k_1, k_2 为实数。我们将区分两个不同的极限情形：一个是导电性很差的导体，它满足 $\sigma/(\omega\epsilon_b) \ll 1$ ；另一种情形是良导体： $\sigma/(\omega\epsilon_b) \gg 1$ 。对于不良的导体的情形，我们得到的近似解为：

$$k \simeq \sqrt{\mu\epsilon_b}\omega + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_b}} \sigma . \quad (4.33)$$

我们看到，在最低阶近似下波在空间的衰减速率（由上式中的虚部给出）几乎不依赖于频率（假定 ϵ_b, μ 和 σ 都不明显地依赖于频率）。相反的，对于一个良导体，我们得到的近似解则为：

$$k \simeq (1 + i) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} . \quad (4.34)$$

这个公式中波矢 k 的虚部的倒数具有长度的量纲。它被称为导体的 **趋肤深度** δ ：

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}, \quad (4.35)$$

它代表了电磁波能够进入导体内的一个特征长度。它明显地依赖于电磁波的频率。频率越高的电磁波越不易穿透良导体，这个效应通常被称为 **趋肤效应**。

这种情形下导体中的平面电磁波的形式可以写成：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/\delta} e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/\delta - i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/\delta} e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/\delta - i\omega t},$$

其中 \mathbf{n} 为垂直于导体表面并指向导体内部的单位矢量。利用齐次的麦克斯韦方程可以将上述电场和磁场的振幅联系在一起：

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu\omega} k\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad (4.36)$$

由于波矢 k 现在是复数，我们得知导体内的磁场与电场之间一般存在位相差。这个位相差可以很容易地从公式 (4.31) 中得到。特别对于良导体而言， $\sigma/(\omega\epsilon_0) \gg 1$ ，这时 k^2 几乎是纯虚的，因此磁场与电场的位相差几乎为 $\pi/4$ 。

类似于第 17 节的讨论，我们也可以研究平面电磁波从一个非导电介质入射到一个导电介质表面时的反射和透射问题。原则上来说，我们需要的只是将第 17 节中第二种介质的介电常数用本节中给出的等效复介电常数 (4.30) 替代即可。第 17 节中许多的结论仍然成立，唯一复杂的是偏振的变化情况。由于具体的公式过于复杂繁琐，我们这里就不再讨论了。

19 介质色散的经典模型

这一节中我们将简要地讨论一下介质的色散问题。这是一个十分复杂而广泛的课题，不大可能在这么小的篇幅内加以详述。我们将从最为简单的经典振子模型出发来进行定性或半定量的讨论。详尽的色散理论的处理必须借助于固体物理和量子物理的知识。本节讨论的最主要的目的是借助于一个十分简单的模型使读者对介质介电常数依赖于频率的基本特性有一个大致的了解，从而更好地理解色散现象的起源。

本节中我们将使用所谓的 **经典振子模型**。这个模型假设介质中的电子可以看成是一些（可能包含阻尼的）经典简谐振子，它们有各自的本征频率和阻尼系数。一个电子在谐振的电场（比如说可以是单色平面电磁波）作用下做受迫振荡，电子会偏离其固有平衡位置从而产生一个平均的电偶极矩：

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right), \quad (4.37)$$

其中 ω 是外电场的频率, ω_0 和 γ 是振子的本征(圆)频率和阻尼系数。现在假定构成介质的原子⁶中的各个电子分别具有不同的本征频率: ω_i 和阻尼系数 γ_i , $i = 1, 2, \dots$ 。假定在一个原子中, 具有某个特定本征频率 ω_i 和阻尼系数 γ_i 的电子数记为 f_i 。显然 $\sum_i f_i = Z$ 其中 Z 为一个原子中的总电子数目。当这样的一个模型介质处在谐振的电磁场中时, 电磁场会使得介质产生一个平均的电偶极矩(即将介质极化)。因此, 这个模型给出的介质介电常数为:

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}, \quad (4.38)$$

其中 N 是介质单位体积中的原子数目; f_i 被称为具有频率 ω_i 的电子的振子强度; e 和 m 分别是电子的电荷和质量。这个看上去纯经典的公式其实对于量子的情形也是很不错的描述, 我们所需要的只是将上式中的参数, 例如: f_i , ω_i 等赋予量子力学的解释。

¶ 一个值得单独讨论的情形就是导体。这时介质中有某些电子可以视为是“自由”的电子,⁷ 也就是说, 它们具有 $\omega_0 = 0$ 的本征频率。如果我们将所有其他“非自由”电子的贡献都归入介电常数 $\epsilon_b(\omega)$, 那么公式(4.38)则可以写成:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + i \frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (4.39)$$

如果我们将这个式子与公式(4.30)比较, 我们发现:

$$\sigma(\omega) = \frac{f_0 Ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (4.40)$$

这就是著名的(并且很古老的)德鲁德公式(Paul Karl Ludwig Drude, 1900)。当频率比较低的时候, 我们可以忽略掉上式分母中的虚部, 因此电导 $\sigma(\omega)$ 基本上是实的。在固体物理中, 常常令 $\gamma_0 = 1/\tau$, 其中 τ 具有时间的量纲, 称为自由电子的驰豫时间。

¶ 另外一个值得注意的极限是高频极限。按照公式(4.38), 如果外场的频率非常高, 远远高于介质中的所有 ω_i , 那么介质的介电常数具有十分简单的形式:

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}. \quad (4.41)$$

这个公式中的 ω_p 被称为等离子体频率。注意, 这个近似公式是对于所有介质在极高频时都成立的。作为一个比较特殊的例子, 考虑纯粹的等离子体(比如地球的电离层),

⁶原则上也可以是分子。在那种情形下, 下面的描述中的“原子”也相应换为“分子”。

⁷更为确切的说法是“巡游电子”, 因为这些介质中的电子实际上并不是真正“自由”(无相互作用)的。

这时介质中的所有电子都是自由的，如果我们进一步忽略电子的阻尼效应，那么公式 (4.41) 就对于所有频率（而不仅仅是高频）都成立。对于这样的等离子体，如果电磁波的频率小于其等离子体频率，那么公式 (4.41) 给出的介电常数会使该电磁波的波矢 \mathbf{k} 中进入等离子体区域的分量变成纯虚数，这意味着电磁波的振幅一进入等离子体就指数地衰减了。换句话说，如果有一个电磁波从普通的低层大气入射到高层的电离层，它将被完全反射回来而不会穿透电离层。正是由于这个原因，地球上频率不太高的电磁波信号（例如长波）可以经电离层反射而传递很远。但是高频的电磁波是可以穿透电离层的。类似的现象也出现在金属中，简单的数量级估计指出：普通的金属的等离子体频率处在紫外到 X-射线波段，所以虽然多数金属对于可见光是不透明的，但对于紫外线会逐步变成透明的，这个现象称为金属的**紫外透明**。

¶ 对于一般的频率而言，由于通常非导电介质的 γ_i 比较小，因此公式 (4.38) 给出的介电常数基本上是实数。由于复的介电常数意味着电磁波的吸收（耗散），因此如果所有的 γ_i 都很小，只要电磁波的频率不接近介质的振子频率，电磁波的吸收就很小，即该介质对于电磁波来说就是**透明的**。但是，在 $\omega \simeq \omega_i$ 的时候，相应于该频率的吸收就会十分明显。在振子频率附近，介质的介电常数的虚部会有一个明显的增强。这个频率区间被称为该介质的**共振吸收区**。在共振吸收区内，伴随着虚部的增强，其实部也会剧烈地变化。例如，所谓反常色散的现象就往往出现在共振吸收区。当介电常数明显地成为复数时，电磁波的波数也是复数：

$$k = k_1 + i \frac{k_2}{2}. \quad (4.42)$$

其中的 k_2 标志了电磁波振幅随传播距离的指数衰减，⁸ 它被称为该介质的**衰减常数**或者**吸收系数**。

一个典型的例子是水的介电常数。在图 4.3 中，我们显示了水的吸收系数作为电磁波波长的函数。这个图表明水对于电磁波的吸收系数在多数频率范围内一直是很大的。仅仅在一个非常狭小的频率窗口之内，水的吸收系数陡然变小。这个窗口所对应的光波长恰好就是我们称之为**可见光**的波段（大约 3000 ~ 7000）。也就是说，当且仅当电磁波的波长在这个波段时，水才是非常透明的。为什么水的介电常数恰好是这样的行为？要回答这个问题恐怕不是很容易的事情，而且肯定会涉及到水分子的结构及其量子力学性质。⁹ 但是，如果我们承认这个实验事实，它能够解释为什么我们的肉眼仅仅能够看到“可见光”。其背后的原因就在于地球上所有的动物都源于海洋。因此在这个水环境中进化发展而来的各种动物（包括人类的祖先）能看到的自然就是那些能够透过海水的电磁波。换句话说，图 4.3 为“水是生命之源”提供了最生动而有力的佐证。

⁸注意电磁波强度正比于振幅的模方，因此波的强度按照 $e^{-k_2 z}$ 衰减，其中 z 是传播距离。

⁹事实上据笔者所知，水的这些性质目前并没有十分令人满意的微观解释。

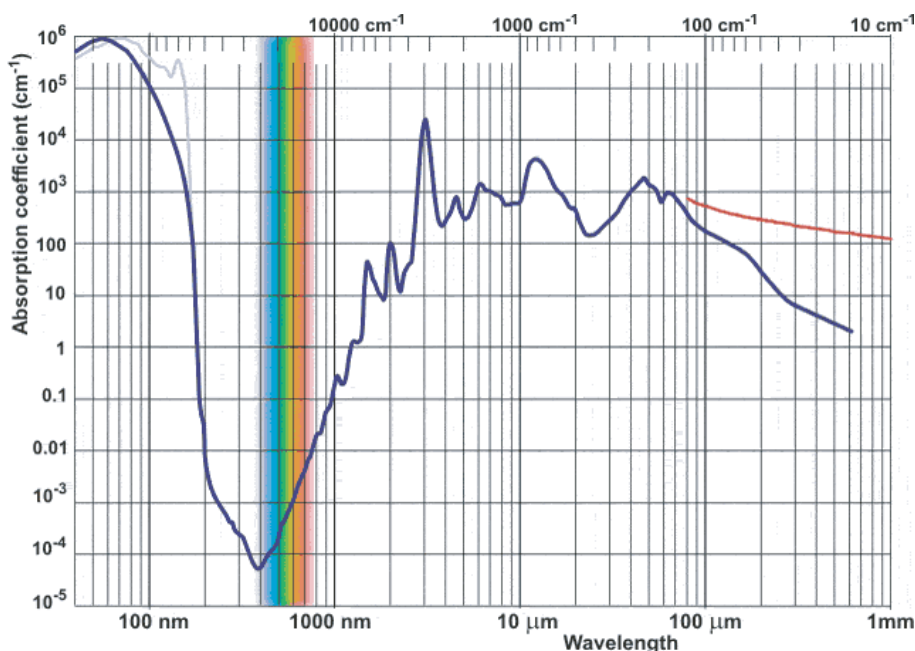


图 4.3: 水的吸收系数作为波长的函数。图中垂直的彩色条纹对应于可见光的波段。我们发现, 一般来说水对于电磁波吸收很强。仅仅在可见光波段的狭窄窗口中, 水才变得格外透明。

20 电磁信号在色散介质中的传播

¶ 前面几节中讨论的电磁波的传播都仅仅涉及了无限延展的、单色均匀平面波。真实的电磁波往往不是单色的, 也不是均匀无限延展的。它们往往是以波包 (wave packet) 的形式传播的。一个波包实际上就是一系列单色平面波的线性叠加。为了简化讨论, 我们将以一维波包为例来说明, 推广到三维是直接了当的。

20.1 波包的色散

¶ 考虑一个一维波包, 它的振幅可以写为一系列不同波数 (频率) 平面波的叠加:¹⁰

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk, \quad (4.43)$$

其中 $\omega(k)$ 的形式依赖于介质的色散性质。系数 $A(k)$ 表征了这个波包中不同频率单色波的成分, 它可以由某个时刻, 比如说 $t = 0$ 时刻的波包振幅 $u(x, 0)$ 给出:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (4.44)$$

¹⁰为了简化讨论, 这一节中讨论的波都是标量波, 没有考虑电磁波都偏振。

大家很容易验证，如果在 $t = 0$ 时刻的波 $u(x, 0) = e^{ik_0x}$ ，那么傅立叶振幅 $A(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k - k_0)$ ，我们就得到单色的平面波： $u(x, t) = e^{ik_0x - i\omega(k_0)t}$ 。但是如果在 $t = 0$ 时刻 $u(x, 0)$ 不是单色平面波的形式，而是在空间有一定延展的波包，那么 $A(k)$ 也不再是 δ -函数，而是在 k -空间有一定延展的函数。而且，傅立叶变换的基本性质保证了 $u(x, 0)$ 在实空间的延展 Δx 以及它的傅立叶变换 $A(k)$ 在 k -空间的延展 Δk 之间满足一个重要的关系：

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}. \quad (4.45)$$

这个关系可以普遍地证明（在给出 Δk , Δx 的明确定义之后）。在两边乘以常数 \hbar 之后，它实际上就是量子力学（确切地说是波动力学）中著名的 **不确定性关系**。这个关系说明，如果我们构造一个在实空间具有一定延展 Δx 的波包，我们需要选择在 k -空间也具有一定延展 Δk 的一系列单色波的叠加。按照上面的不确定性关系，实空间的波包越窄，傅立叶空间需要的不同波长的单色波的延展就越宽。¹¹

¶ 现在我们讨论一个波包在色散介质中的传播问题。这是一个比单色平面波传播要复杂得多的物理问题。对于一个一般的色散介质，波的圆频率是波数（波长）的函数：

$$\omega = \omega(k), \quad k = k(\omega). \quad (4.46)$$

由于波的相速度为：

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(k)}, \quad (4.47)$$

因此我们看到，由于色散的存在，相速度 v_p 对于波包中不同频率（波数）的成分是不相同的。因此，尽管波包是一系列单色波的线性叠加，但是由于不同单色波传播的相速度不同，这就造成不同频率的成分之间的位相差会随时间的演化而发生相对变化。返回到实空间，这意味着原先波包的形状一般来说将随着时间的推移发生变形。不仅如此，我们知道对于一个单色平面波，它的能量流动的速度与其相速度是相同的。但是，对于一个波包来说，它的能量流动的速度就变得十分复杂了。如果波包的谱 $A(k)$ 仅仅具有一个比较小的延展，也就是说，我们假定它仅仅在 $k = k_0$ 附近一个 Δk 的很小范围内不等于零，同时假定在这个波数（频率）附近， $\omega(k)$ 是缓慢变化的，那么我们可以利用泰勒展开：

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \dots, \quad (4.48)$$

其中 $\omega_0 = \omega(k_0)$ 。将这个近似带入我们发现波包随时间演化的行为可以近似地表达为：

$$u(x, t) \simeq u(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}, \quad (4.49)$$

其中 v_g 是介质中的 **群速度**，其定义为：

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}. \quad (4.50)$$

¹¹类似的结论大家在傅立叶光学中也遇到过吧？

公式 (4.49) 说明, 如果近似 (4.48) 成立, 在色散介质中传播的波包在 t 时刻的强度为: $|u(x - v_g t, 0)|^2$ 。与 $t = 0$ 时刻的波包的强度: $|u(x, 0)|^2$ 相比较, 波包的整体形状没有改变, 只不过它的位置按照 **群速度** 移动了一段距离 $v_g t$ 。因此, 这时描写波包信号传播更为恰当的物理量是它的群速度 v_g , 而不是相速度 v_p 。可以证明这时波的能量流动的速度也可以近似地用群速度而不是相速度来描写。利用波矢、频率以及折射率的关系: $\omega(k) = ck/n(k)$, 我们可以得到:

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega(dn/d\omega)}. \quad (4.51)$$

因此只要存在色散, 即 $dn/d\omega \neq 0$, 群速度就不同于相速度。

¶ 需要特别提请大家注意的是, 群速度是介质中信号 (能量) 传递的速度的结论并不能无限地扩大。从上面的推导我们看到, 它仅仅是在近似条件 (4.48) 成立的前提下才是对于色散介质中电磁波传播有意义的一个物理量。如果这个近似不成立, 那么群速度同样也会失去其意义, 就像相速度对于色散介质中的波包的传播失去其意义一样。如果 $dn/d\omega > 0$, 这称为 **正常色散**; 如果 $dn/d\omega < 0$, 这称为 **反常色散**。对于正常色散的情形, 由于通常 $n > 1$, 于是群速度比相速度要小, 而且二者都小于真空中的光速。对于反常色散的情形, 由于 $dn/d\omega$ 的绝对值可以很大。这一点可以从我们前面关于介质的介电常数的振子模型的表达式中看出。特别是当频率接近某个振子频率时, 介质的折射率会出现剧烈的变化, 这往往伴随着剧烈的反常色散。这时, 群速度可以大于相速度, 甚至可以大于真空中的光速。在更为极端的情形下, 它还可以是负的。这些貌似奇怪的行为其实并不会撼动狭义相对论的基本原理, 因为, 当群速度表观上超过真空光速甚或变为负数时, 群速度本身已经失去了其原本的物理意义, 这时它并不能代表介质中信号或者能量的传播速度。事实上我们随后 (见第 20.3 小节) 就会证明, 在相当一般的假定下, 任何介质中信号的传播速度都不会超过真空中的光速。

20.2 因果性与 Kramers-Kronig 关系

¶ 上一小节我们简要讨论了波包信号在色散介质中传播的问题。我们看到, 对于色散介质中的波包信号来说, 它的传播一般来说是很复杂的, 依赖于介质的介电常数的具体行为。我们虽然有了一个描写介质介电常数的模型, 但是我们希望了解最一般的情形下, 介质的介电常数有何性质。这一小节我们就来讨论 **因果性** 对于介电常数的限制。我们会看到, 仅仅利用因果性, 我们已经能够对于介质的介电常数的许多定性行为有所了解。不仅如此, 我们还可以得到联系介电常数实部和虚部的一个重要关系, 即所谓的 Kramers-Kronig 关系。一个普遍的因果性的假定竟然能够导致这样的关系还是相当令人惊诧的。

¶ 为了简单起见, 我们仅仅讨论各向同性的线性介质。在第 4 节中我们就提到, 介质

中的电位移矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 与电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 之间存在一个普遍的线性关系：¹²

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \epsilon_0 \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \right], \\ \chi(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1 \right] e^{-i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (4.52)$$

我们看到, t 时刻的电位移矢量一般来说依赖于其他时刻的电场强度。

现在我们要运用因果性了。电位移矢量是由电场强度和由它所引起的介质的极化所构成的。也就是说, 电场强度是引起电位移矢量偏离其真空值的原因。因此, 因果性意味着在 t 时刻的电位移矢量, 应仅依赖于这个时刻之前的电场强度矢量, 即:

$$\chi(\tau) = 0 \quad \text{如果 } \tau < 0. \quad (4.53)$$

因此, 我们可以将 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的线性关系写为:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_0^{\infty} \chi(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \right], \quad (4.54)$$

这意味着我们可以得到一个关于介电常数的形式表达式:

$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (4.55)$$

这个关于介质介电常数的表达式, 以及 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 都是实物理量的事实已经能够导出一系列重要的结论了:

☞ 如果我们假定 $\chi(\tau)$ 对于所有的 τ 为有限, 那么 $\epsilon(\omega)$ 在复 ω -平面的 **上半平面** 内 (即: $Im(\omega) > 0$ 的区域) 解析。

☞ 如果我们加上貌似合理的假定: $\chi(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, 即无穷久远的过去的电场对于目前的极化没有影响, 那么可以证明 $\epsilon(\omega)$ 在实轴上也是解析的。但是这一点其实对于导体是不对的。对于导体我们有:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi(\tau) = \sigma/\epsilon_0. \quad (4.56)$$

这样的行为使得 $\epsilon(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处存在一个极点, 正如公式 (4.30) 所示。因此, 除掉在导电介质的情形下 $\epsilon(\omega)$ 在原点会出现一个极点之外, $\epsilon(\omega)$ 在包括实轴在内的上半平面解析。

☞ 在大的 ω 处介电常数的行为可以通过将公式 (4.55) 分部积分得到:

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \simeq 1 - \frac{\chi'(0)}{\omega^2} + \dots, \quad (4.57)$$

其中我们假定了: $\chi(0) = 0$ (即假定它在 $\tau = 0$ 处连续)。

¹²在这一小节中, 我们暂时恢复电场以及电位移矢量的实表示。

☞ 介电常数 $\epsilon(\omega)$ 满足下面的共轭关系:

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega^*), \quad (4.58)$$

这个关系起源于 $\chi(\tau)$ 是实数的事实。

¶ 利用上面建立的介电常数的解析行为, 我们可以得到一个十分重要的关系。由于 $\epsilon(\omega)$ 在上半平面解析, 因此我们有:

$$\epsilon(z)/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1)}{\omega' - z} d\omega', \quad (4.59)$$

其中 z 是上半平面上的任意一点, 积分的围道是由实轴以及上半平面无穷远处的半圆构成。介电常数在大的 ω 处的行为保证了上半平面无穷远处半圆的积分贡献为零。因此上式可以写成沿着实轴的积分。我们进一步选取: $z = \omega + i\delta$, 其中 $\delta \rightarrow 0^+$, 并且利用关系:

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\delta} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega' - \omega} \right) + \pi i \delta(\omega' - \omega), \quad (4.60)$$

我们就得到:

$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1)}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4.61)$$

我们也可以将这个复的等式的实部和虚部分别写出:

$$\text{Re}[\epsilon(\omega)/\epsilon_0] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[\epsilon(\omega')/\epsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (4.62)$$

$$\text{Im}[\epsilon(\omega)/\epsilon_0] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4.63)$$

这就是著名的 Kramers-Kronig 关系, 又被称为 **色散关系**。正如我们强调的, 导出它们仅仅利用了因果性以及一些十分基本的假定。因此, 我们可以期待上述关系对于所有介质普遍成立。

20.3 因果性与最大信号传播速度

¶ 在这一小节中, 我们将利用因果性证明任何介质中信号传播的速度不会大于真空中的光速。为了简化讨论, 我们假定一个空间 $x > 0$ 的区域中充满了折射率为 $n(\omega)$ 的介质而 $x < 0$ 的部分则为真空。一个电磁波从 $x < 0$ 的真空正入射到介质上并且传入介质。结合第 (17) 节中的公式以及前面的讨论, 介质中的电磁波可以用下式表达:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{1 + n(\omega)} \right] A(\omega) e^{ik(\omega)x - i\omega t} d\omega, \quad (4.64)$$

其中的傅立叶振幅 $A(\omega)$ 为:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_I(x=0^-, t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.65)$$

上式中 $u_I(x, t)$ 是真空中入射电磁波的振幅。

我们现在假设真空中入射的波的波前在 $t < 0$ 时没有到达 $x = 0$, 即假设:

$$u_I(x=0^-, t) = 0, \quad \text{如果: } t < 0. \quad (4.66)$$

那么按照类似于上小节的论述, $A(\omega)$ 将会是上半平面的解析函数。我们还进一步假定 $A(\omega)$ 在大的 ω 处有界 (也是一个十分合理的假定)。现在考察公式 (4.64) 中的相因子在大的 $|\omega|$ 时的行为。由于当 ω 很大时 $n(\omega) \rightarrow 1$, 因此我们有:

$$i[k(\omega)x - \omega t] \rightarrow \frac{i\omega(x - ct)}{c}. \quad (4.67)$$

于是我们发现, 如果 $(x - ct) > 0$, 那么我们可以将公式 (4.64) 中的积分加上上半平面无穷远处的半圆构成一个闭合围道。由于 $A(\omega)$, $n(\omega)$ 在上半平面都是解析的, 因此著名的 Cauchy 定理告诉我们, 这个积分的结果一定恒等于零:

$$u(x, t) = 0, \quad \text{如果: } (x - ct) > 0. \quad (4.68)$$

这意味着, 无论介质的折射率 $n(\omega)$ 的具体形式如何, 该介质中信号传播的速度都不可能大于真空中的光速。这也就是狭义相对论所要求的。

¶ 最后我们指出, 如果利用公式 (4.64) 来考察 $(x - ct) < 0$ 中的信号传播, 那么一般来说我们将得到非零的结果。事实上, 在介质中传播的电磁波会分为两种信号—分别称为 **索墨菲波前** (Sommerfeld precursor) 和 **布里渊波前** (Brillouin precursor)—依次到达。更为详细的讨论可以参考相关书籍 [6] 中的 §7.11 节, 我们这里就不再深入了。

21 波导与谐振腔

¶ 电磁波在现代社会中最广泛的应用就在于 **远程通信**。在这类实际的应用中, 需要将电磁信号传递到比较远的地方。这类传输大体可以分为两类: 第一类就是我们前面已经讨论过的, 电磁波在自由空间 (实际上是空气中) 的直接传播; 第二类则是利用某种导线来进行传播。第一类的例子是无线通信 (手机间的通信、地面与卫星的通信等等); 第二类则属于有线通信。有线通信中使用的传递电磁波的导线一般被通称为 **波导**。传统的波导, 例如, 电话线、有线电视的同轴电缆等等, 一般由金属制成, 被称为 **金属波导**。随着近年来光通信的发展, **介质波导** (由不导电的光介质构成的光纤) 变得十分普遍了。

谐振腔 一般是由金属或导电介质所围成的一个封闭空间。它的主要作用是可以进行频率

的选择。正是由于在实际中的广泛应用，波导与谐振腔中的电磁波的传播问题值得单独加以讨论。

为了简化讨论，我们这里假定波导管的电磁和几何性质沿着电磁波传播的方向具有不变性。在波导管中，电磁波将沿着该波导管的平移对称轴（我们取为 z 轴）在介质中传播。这些传播的电磁波由于在边界面上必须满足一定的边界条件，所以波导管中传播的电磁波会表现出与无边界介质中的电磁波传播不同的一些特性。如果我们将金属波导管沿 z 轴的两端封闭起来，就构成了一个完全由导体所围合出来的封闭区域，这就是一个典型的谐振腔。由于导体边界的边界条件，谐振腔中的电磁波都是所谓的驻波。谐振腔在光学中十分重要因为它的谐振频率完全是由它的几何构型所确定的。

本节中，我们将首先讨论金属波导，然后简要地讨论谐振腔，最后讨论介质波导（光纤）的电磁理论。我们将仅仅局限于电磁理论层面的讨论。对于它们的实际应用，我们只会简单提及。有兴趣的读者可以参考相关方面的专门书籍。

21.1 麦克斯韦方程按照横向和纵向的分离

如果不考虑边界条件，波导管内部的电磁场所满足的方程与无限介质中的情况相同，都是无源的麦克斯韦方程组。如果假定所有场具有形如 $e^{-i\omega t}$ 的随时间振荡因子，那么电磁场满足：

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.69)$$

根据所研究问题的对称性，将电磁场的 **横向分量**（也就是在 xy 平面内的分量）与它的 **纵向分量**（ z 分量）分开是十分有帮助的。我们有：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_3, \quad (4.70)$$

磁场 \mathbf{B} 也可以类似地进行分解。需要特别引起注意的是，由于波导管边界的影响，波导管中沿着 z 方向传播的电磁波可以有沿着传播方向的纵向分量。这一点在无边界空间中是不可能的。利用电磁场的横向和纵向的分解，麦克斯韦方程可以用场的横向和纵向分量表达为：

$$\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} + i\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_t = \nabla_t \mathbf{E}_z \quad \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z, \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} - i\mu\epsilon\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t = \nabla_t \mathbf{B}_z \quad \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -i\mu\epsilon\omega \mathbf{E}_z, \quad (4.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z}, \quad (4.73)$$

这个公式说明，对于一个在波导管中传播的电磁波来说，只要确定了电磁场的纵向分量 \mathbf{E}_z 和 \mathbf{B}_z ，电磁场的横向分量就可以确定了。因此，波导问题中的关键就是求解电磁场的

纵向分量。由于问题具有沿纵向的平移对称性，我们可以将波导管中的电磁波的解写成（注意，是电磁场的所有分量，不仅仅是横向分量！）：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, y) \\ \mathbf{B}(x, y) \end{pmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t} . \quad (4.74)$$

这样一来，我们可以将上述问题进一步简化。首先，我们可以明确写出横向的场量用纵向的场量表达的公式。利用 (4.71) 和 (4.72) 我们得到：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} [k\nabla_t E_z - \omega\mathbf{e}_3 \times \nabla_t B_z] , \\ \mathbf{B}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} [k\nabla_t B_z + \mu\epsilon\omega\mathbf{e}_3 \times \nabla_t E_z] . \end{cases} \quad (4.75)$$

另一方面，波导管中电磁场满足的三维亥姆霍兹方程 (4.69) 就可以化为一个二维的亥姆霍兹方程：

$$(\nabla_t^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 . \quad (4.76)$$

这里的参数 k 被称为波导管中电磁波的波数。它目前是一个待定的参数，其数值由边界条件确定。这个方程虽然对于电磁场的所有分量都是成立的，但是我们真正需要的仅仅是它们的纵向分量。只要利用边条件将波导管中电磁场的纵向分量确定了，我们就可以利用公式 (4.75) 直接得到电磁场的横向分量。因此，求解波导管中电磁波传播问题的核心就是利用适当的边条件，求解其中电磁场纵向分量所满足的二维亥姆霍兹方程。由于不同波导（金属波导和介质波导）所满足的边条件不同，我们将分别讨论它们的解。

¶ 由于波导管中的电磁波完全由电磁场的纵向分量所确定，因此人们往往按照电磁场的纵向分量的不同行为对波导管中的传播的电磁波进行分类。例如，如果电场的纵向分量恒等于零，即： $\mathbf{E}_z = 0$ ，这种波导管中传播的电磁波就被称为横电波，或者称为 TE 波、横电模式、TE 模式。类似的，如果磁场的纵向分量恒等于零，这种波就被称为横磁波，或者 TM 波、横磁模式、TM 模式。如果电场和磁场的纵向分量都恒等于零，这种模式就被称为横电磁波，或者 TEM 波、横电磁模式、TEM 模式。

21.2 金属波导

¶ 为了讨论上的简化，我们本节中将假定波导管的外壁由所谓的理想导体构成。在第 18 节中我们看到：如果导体的电导率是无穷大，电磁波根本无法进入导体内部，也就是说理想导体内部的电场和磁场都等于零。于是，我们得到由理想导体构成外壁的波导管中电磁场在边界上应当满足：

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

其中 \mathbf{n} 是波导管界面 S 上的法向单位矢量。如果我们把电场和磁场都分解成横向的分量 \mathbf{E}_t 以及纵向的分量 $\mathbf{E}_z \mathbf{e}_3$ ，那么考察方程 (4.71) 和方程 (4.72) 我们发现上面两个边界条件分别等价于：

$$\mathbf{E}_z|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (4.77)$$

因此我们看到，电场和磁场的纵向分量，我们现在统一用 $\psi(x, y)$ 来表示，确立了一个二维的边值问题：

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi &= 0, \quad \gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2, \\ \psi|_S &= 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

其中第一个边界条件适用于电场的纵向分量而第二个边界条件适用于磁场的纵向分量。这组方程还说明了金属波导的一个重要特性：横电和横磁模式是完全分离的，互相没有干扰。它们各自由自己的边条件所完全确立。¹³ 具体来说，我们有：

$$\begin{aligned} \psi = \mathbf{E}_z, \mathbf{B}_z = 0, \mathbf{E}_t &= \pm \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t \psi, \text{ 对于 TM 波} \\ \psi = \mathbf{H}_z, \mathbf{E}_z = 0, \mathbf{H}_t &= \pm \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t \psi, \text{ 对于 TE 波} \end{aligned} \quad (4.79)$$

这个公式里面的 \pm 符号分别对应于 $e^{\pm ikz}$ 形式的波。无论对于哪一种模式（TE 或 TM），我们总是有：

$$\mathbf{H}_t = \frac{\pm}{Z} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t. \quad (4.80)$$

其中的 Z 称为波导中的波阻抗。它的表达式为：

$$Z = \begin{cases} \frac{k}{\epsilon\omega} = \frac{k}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{TM 波} \\ \frac{\mu\omega}{k} = \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{TE 波} \end{cases} \quad (4.81)$$

我们知道，二维的边值问题 (4.78) 的解是唯一的，并且相应的二维拉普拉斯算符的本征值 γ^2 一般是正的、分立的实数。如果我们将这些分立的本征值记为： γ_λ^2 。那么对于一个给定的频率 ω ，电磁波的波数为：

$$k_\lambda^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2. \quad (4.82)$$

我们发现这个表达式的一个明显特点：电磁波的波数并不是对于所有的频率都是实数。对于一个给定的 γ_λ^2 ，存在一个所谓的截止频率：

$$\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (4.83)$$

¹³我们下面马上会看到，在介质波导中的情形就不是如此了。

如果频率 ω 小于截止频率，那么相应的电磁波根本无法在波导管中传播。由于边值问题的本征值 γ_λ^2 一般总是存在一个最小可能的值，所以对于一个给定的波导管，也存在一个最小的截止频率。频率低于波导管的最小截止频率的电磁波无法在这个波导管中传播。

考察前面的方程我们还发现：横电磁模式（TEM 模式）中的电场和磁场都类似于一个二维的静电场。作为一个推论，横电磁（TEM）模式无法在一个单连通截面的波导管中存在，因为一个二维单连通区域中的拉普拉斯方程的解，如果它满足边界为零的话，在该区域内也一定恒等于零。在实际应用中，可以使用同轴电缆或者平行导线来实现横电磁模式的传播。横电磁模式的波还有一个特性，那就是它的波数与频率之间的关系和无边界空间中平面波的波数与频率之间的关系完全相同：

$$k_{TEM}^2 = \mu\epsilon\omega^2 \implies k_{TEM} = k_0 \equiv \sqrt{\mu\epsilon}\omega. \quad (4.84)$$

因此，横电磁模式的电磁波的相速度与无边界空间中平面波的相同，就等于该介质中的光速。对于一般的横电或横磁模式，由于截止频率的存在，可以证明波导管中的电磁波的相速度总是大于无边界空间中的光速，在截止频率附近，波导管中的电磁波的相速度趋于无穷大。在金属波导中，可以证明其平均能量的流动速度应当用群速度而不是相速度来描写。

例题 4.1 矩形波导管 考虑一个理想导体构成的矩形波导管，它的截面的边长分别为 a 和 b （假定 $a > b$ ）。讨论其内部可以传播的最小频率的电磁波。

解： 对于 TE 模式的波，考虑到磁场纵向分量的法向导数在边界为零，我们得知管内的磁场的纵向分量一定可以写成：

$$H_z \equiv \psi_{m,n}(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad (4.85)$$

这里的整数 n 和 m 不能同时为零（否则管内的电磁场恒为零）。与之相应的本征值和截止频率为：

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \omega_{m,n} = \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (4.86)$$

由于我们假定 $a > b$ ，所以最低的截止频率是 $m = 1, n = 0$ 的情形，即 $\omega_{1,0} = c\pi/(\sqrt{\mu\epsilon}a)$ 。

对于 TM 模式的电磁波，本征值仍然与 TE 模式相同，但是由于电场的纵向分量是两个正弦函数相乘，因此要求整数 n 和 m 都不为零（否则管内的电磁场恒为零）。因此相应的最低截止频率是 $\omega_{1,1}$ 。

搞定

21.3 谐振腔

下面我们简单讨论一下谐振腔。如果我们将一个导体波导管的两端也用导体封闭起来，就构成了一个谐振腔。我们前面关于波导管的讨论完全适用，唯一需要修正的是，这时沿 z 方向传播的行波变成了驻波，而且它的波数一定是分立的： $k = \frac{p\pi}{d}$ ，这里 p 是一

个整数而 d 是波导管纵向的长度。横向的边值问题确定的本征值如果是 γ_λ^2 ，那么谐振腔中能够存在的频率一定是分立的（量子化的）：

$$\mu\epsilon\omega_{p,\lambda}^2 = \gamma_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2. \quad (4.87)$$

这些分立的频率被称为这个谐振腔的**固有频率**，或者**本征频率**。它们的具体数值是由谐振腔的几何性质和电磁性质决定的。谐振腔可以被用来筛选固定频率的电磁波，这种应用在激光的研究中经常遇到。

谐振腔的几何构形并不一直都是柱形的。事实上，任何以导体为边界封闭起来的空间都可以构成谐振腔。一个比较有趣的例子是我们的地球（作为一个导体）与它的电离层（另一个导体）之间构成的谐振腔。我们看到：一个谐振腔的最低固有频率与腔的尺寸成反比。一个大的谐振腔可以拥有极低的谐振频率。例如，地球与地球的电离层之间的谐振腔的最低频率大约在 8Hz 左右。这种谐振被称为**舒曼谐振**（Schumann resonance），并且在实验上的确被观测到。舒曼谐振在地学上有许多的重要用途。对于物理学来说，它还提供了一个**光子质量上限**的不错估计。根据量子力学，电磁场相应的量子是光子，它的能量可以写成 $\hbar\omega$ 。如果光子有质量的话，我们一定有光子的总能量大于它的静止质量： $\hbar\omega > m_\gamma c^2$ 。如果我们将舒曼谐振的最低频率带入，我们发现光子质量 m_γ 一定小于大约 10^{-46} 克，这是一个相当不错的估计。

21.4 介质波导

¶ 这一小节中我们来讨论另一类应用十分广泛的波导——**介质波导**。它的最主要的应用是现代互联网中骨干网的光纤。**光纤**（optical fiber）是目前高速宽带互联网传递信息的主要通道。它比起以往的金属波导（例如同轴电缆、电话线等等）的优势就在于它的宽带、低耗等特性。¹⁴

实际应用的光纤一般由 SiO_2 制成。一根单独的光纤的直径范围大约从几个微米（ μm ）到几十微米。前者主要用于**单模传输**（single-mode transmission）而后者则用于**多模传输**（multi-mode transmission）。真正铺设的**光缆**（直径大概在厘米量级）则由若干根子光缆构成，每个子光缆又包含若干根细小的光纤。光纤中传播的电磁波的频率很高，一般可以高到 10^{15}Hz ，相应的电磁波的波长则大约在微米量级。按照上述量级的描述我们发现，对于多模传输来说，信号的波长远小于光纤的尺度；对于单模传输来说波长则与光纤尺度相当。这意味着对于多模传输来说，我们可以使用所谓的**程函近似**

¹⁴我们日常用的网线并不是光纤，而是普通的金属波导。通常小的局域网是采用普通的金属线（双绞线结构），只有骨干网才运用光纤。这主要是由于将光信号转变为通常电脑信息信号的设备比较昂贵，不是通常个人用户所能够承担的缘故。因此，目前互联网的所谓最后一英里（last mile）仍然没有采用光纤传输。

(eikonal approximation)。这种近似实际上就是忽略光的波动性，将其看成是几何的光线，也就是几何光学近似。¹⁵ 在这种近似下，光纤传播光信号的基本机制就是信号在光纤的核心区域与外部区域的边界上发生全内反射。有关这类模式的传播问题，我们这里不打算深入探讨。有兴趣的同学可以参考相关光学方面的书籍。对于单模传输而言，由于电磁波的波长与光纤的尺度可以比拟，因此波动的效应是相当显著的。我们下面将主要探讨单模传播模式。单模光纤的结构十分简单，其截面近似可以看成是圆形。光纤的截面又可以分为光纤核心 (fiber core) 和光纤包层 (fiber cladding) 两个部分。它们一般具有不同的折射率。核心部分具有较大的折射率 n_1 ；包层部分具有较小的折射率 n_2 。

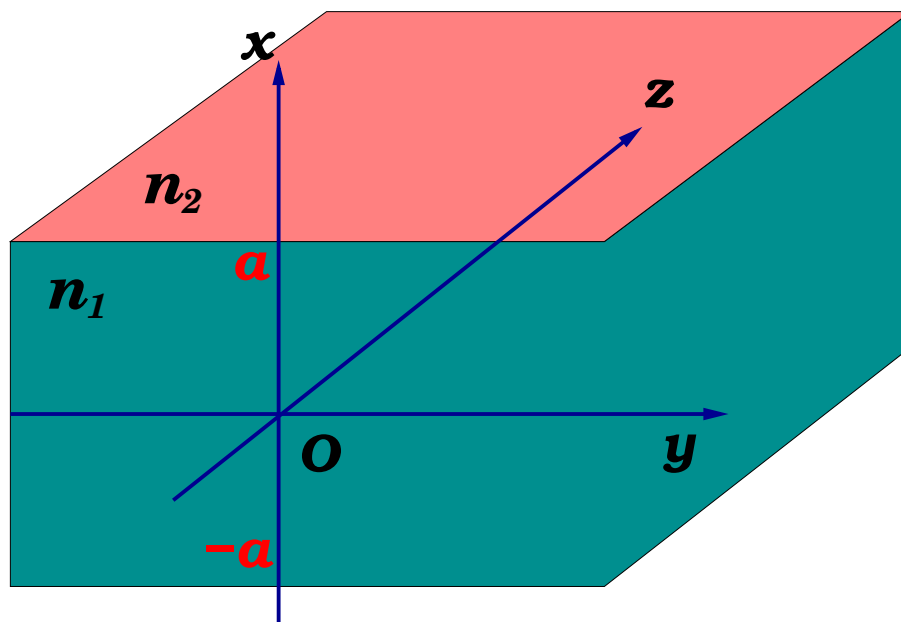


图 4.4: 一个厚度为 $2a$ 的介质波导。我们假设波沿着 $+z$ 的方向传播

¶ 平面介质波导

作为一个简化的（但极不合理的）光纤模型，我们考虑一个平面介质波导。¹⁶ 它的核心部分由一片厚度为 $2a$ 的无穷大的、折射率为 n_1 的介质平板构成。它的外面（包层部分）是折射率为 n_2 的介质。我们当然假定： $n_1 > n_2$ 。我们选取 x 轴垂直于介质平板，并且将 yz 平面选为与介质平板的两个平面都平行的中间平面上，这样光纤核心部分就位于坐标系的 $|x| \leq a$ 的部分（参见图 4.4）。我们假设波导中的电磁波沿着 $+z$ 方向传播，如果电

¹⁵同样的近似在量子力学（波动力学）中又被称为准经典近似 或者 WKB 近似。

¹⁶之所以选取这样一个与实际应用相距比较远的例子（毕竟它看起来一点也不像光纤）作为介质波导的开始是由于它与圆形介质波导比较起来更为简单，同时它可以很好地说明光纤中各种模式的物理特性。

磁波的圆频率为 ω ，我们定义下列光纤理论中经常使用的参数：

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}, V \equiv k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 k_0 a \sqrt{2\Delta}. \quad (4.88)$$

其中 Δ 标志了介质波导两种介质（即核心部分和包层部分）之间折射率的差异，称为光纤的 **轮廓高度参数**（profile height parameter）。对于通常的光纤， $\Delta \simeq 0.01$ ，因此将其处理为小参量是不错的近似（这称为 **弱导波导** 近似）。参数 V 则被称为 **光纤参数**（fiber parameter）。

根据前面普遍的讨论，电磁场的纵向分量（ $\mathbf{E}_z, \mathbf{H}_z$ ）满足亥姆霍兹方程。假定了它们正比于 $e^{ikz - i\omega t}$ 的依赖关系并且考虑到问题沿着 y 方向的平移不变性以后，我们可以假定场的纵向分量不依赖于坐标 y 。于是关于场的纵向分量的亥姆霍兹方程变为简单的常微分方程：

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2 \right) \psi(x) = 0, & \text{对于 } |x| < a. \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 \right) \psi(x) = 0, & \text{对于 } |x| > a. \end{cases} \quad (4.89)$$

其中 $\psi(x)$ 表示电场或者磁场的 z 分量；参数 γ^2, β^2 的定义为：

$$\gamma^2 = n_1^2 k_0^2 - k^2, \quad \beta^2 = k^2 - n_2^2 k_0^2. \quad (4.90)$$

一个正常传播的介质波导要求： $\gamma^2 > 0$ ，以及 $\beta^2 > 0$ 。也就是说，纵向传播的波数 k^2 必定满足：

$$n_2^2 k_0^2 \leq k^2 < n_1^2 k_0^2. \quad (4.91)$$

一般来说，并不是所有频率的电磁波都能够在波导之中传播，截止频率一般可以由 $\beta^2 = 0$ 来确定（见下面的讨论）。由于方程 (4.89) 和边界的对称性，我们可以自然可以将它的解 $\psi(x)$ 分为奇函数解和偶函数解两大类。另外，对于平面介质波导这样的简单情形，我们可以将其中传播的电磁波分为 **横电波**（它的 $\mathbf{E}_z = 0$ ）和 **横磁波**（它的 $\mathbf{H}_z = 0$ ）两类。由于平面介质波导中横电和横磁是完全分离的，这意味着我们前面关于金属波导中的那些公式同样成立。具体来说公式 (4.79) 和 (4.80) 可以直接应用。结合纵向场的奇偶性质，我们可以将平面介质波导中的电磁波模式分为：偶 TE、奇 TE、偶 TM、奇 TM 等四类。其中的奇和偶是以 **横向电场** 分量对于 x 的依赖关系来定义的（因此所谓的偶模式对应于纵场为奇函数，反之亦然）。例如，对于奇模式解我们有：

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \gamma x & \text{对于 } |x| \leq a \\ B e^{-\beta|x|} & \text{对于 } |x| > a \end{cases} \quad (4.92)$$

对于偶模式解，我们只需要将上面方程中的 $\cos \gamma x$ 换为 $\sin \gamma x$ ，同时将外部解 $e^{-\beta|x|}$ 换为： $(x/|x|)e^{-\beta|x|}$ 即可。

下面需要做的就是利用边界条件确定各种解的具体行为。介质波导与前面讨论的金属波导的边条件完全不同。在介质的边界面上，电磁场（或其导数）并不为零，而是必须

与外部的电磁场的相应分量衔接。利用纵向场分量在边界两边连续；以及横向场分量（目前只有沿着 x 方向的场分量）的适当边条件我们得到：¹⁷

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin \gamma a = B e^{-\beta a}, \frac{A}{\gamma a} \cos \gamma a = \frac{B}{\beta a} e^{-\beta a}, \text{偶 TE 波} \\ A \cos \gamma a = B e^{-\beta a}, \frac{A}{\gamma a} \sin \gamma a = -\frac{B}{\beta a} e^{-\beta a}, \text{奇 TE 波} \\ A \sin \gamma a = B e^{-\beta a}, \frac{A n_1^2}{\gamma a} \cos \gamma a = \frac{B n_2^2}{\beta a} e^{-\beta a}, \text{偶 TM 波} \\ A \cos \gamma a = B e^{-\beta a}, \frac{A n_1^2}{\gamma a} \sin \gamma a = -\frac{B n_2^2}{\beta a} e^{-\beta a}, \text{奇 TM 波} \end{array} \right. \quad (4.93)$$

将上面每一种模式的前后两个方程相除，我们就得到了每一种模式传播波数所满足的 **本征方程**。我们定义光纤理论中常用的参数：

$$U \equiv \gamma a, \quad W \equiv \beta a, \quad U^2 + W^2 \equiv V^2, \quad (4.94)$$

其中 V 是 (4.88) 中定义的光纤参数。于是，四种模式的本征方程可以明确表达为：

$$\left\{ \begin{array}{l} W = U \tan U, \text{偶 TE 波}; \quad W = -U \cot U, \text{奇 TE 波} \\ n_1^2 W = n_2^2 U \tan U, \text{偶 TM 波}; \quad n_1^2 W = -n_2^2 U \cot U, \text{奇 TM 波} \end{array} \right. \quad (4.95)$$

在求解这些本征方程的时候必须记住， U 和 W 不是独立的参量，它们满足约束条件： $U^2 + W^2 = V^2$ 。因此一旦光纤参数 V 给定， U 和 W 只有一个独立的。

¶ 本征模式及其截止频率

下面我们来讨论本征方程 (4.95) 的解的行为。首先以 **偶 TE 波** 为例。这个本征方程的解可以通过在 $U - W$ 平面上的曲线： $W = U \tan U$ 与半径为 V 的 $1/4$ 圆： $W^2 + U^2 = V^2$ 的交点来获得。考察函数： $W = f(U) = U \tan U$ 我们发现，它是 U 的单调递增的偶函数，同时它在 $U = (n + 1/2)\pi$ 的地方发散（其中 n 为整数），在 $U = n\pi$ 的地方等于零。因此，函数 $f(U)$ 的值被 $U = (n + 1/2)\pi$ 分为无穷多互不连通的分支。我们发现，随着 V 值由小变大，我们将分别在函数 $f(U)$ 的不同分支上获得越来越多的解。而且，无论 V 的值如何，我们永远可以在函数 $f(U)$ 通过原点的一支上获得一个交点。所以，对于偶 TE 模来说不存在所谓的截止频率。但是，如果我们期望在函数 $f(U)$ 的第二支上也获得交点，我们必须要求： $V \geq \pi$ 。因此偶 TE 模的第二个模式的截止频率对应于： $V_c = \pi$ 。

类似地，我们可以考虑 **奇 TE 模**，这时与圆相交的函数曲线变为： $W = g(U) = -U \cot U$ 。这个函数与函数 $f(U)$ 类似，在我们感兴趣的区间仍然是单调增加的偶函数。只不过将它的各支分开的是 $U = n\pi$ (n 为整数)。函数的零点则出现在 $U = (n + 1/2)\pi$ 。

¹⁷所谓适当是指对于横向的电场分量，需要乘以相应的介电常数以后连续（即 \mathbf{D} 的法向连续）；磁场的横向分量是直接连续。

于是我们发现，要在靠近原点最近的一支上获得交点，我们必须要求： $V \geq \pi/2$ 。这意味着奇 TE 波的截止频率为： $V_c = \pi/2$ 。

显然，随着光纤参数 V 的增加，我们还会在上述函数的更高的分支上获得交点。类似的行为对于 TM 模式也是成立的，只不过由于 $n_1 > n_2$ ，因此 TM 模式的本征值 U 会比相应的 TE 模式的本征值要大。所有上述模式一般会标记为： TE_j 或者 TM_j ，其中整数 $j = 0, 1, 2, \dots$ 的奇偶性对应于奇的或偶的模式。

正如前面提到的，一般来说并不是所有频率的电磁波都可以在介质波导（光纤）中传播。不同的模式一般会有相应的截止频率。如果频率低于某个特定模式的截止频率，该模式将无法在介质波导中传播。通过我们上面关于本征方程的讨论可以看出，某个模式的截止频率可以通过令本征方程中： $W = 0, U = V = V_c$ 求得。于是我们发现，对于前面讨论的 TE_j 或者 TM_j 模式来说，它们的截止频率可以统一写为： $V_c = j\pi/2$ ，其中 $j = 0, 1, 2, \dots$ 。

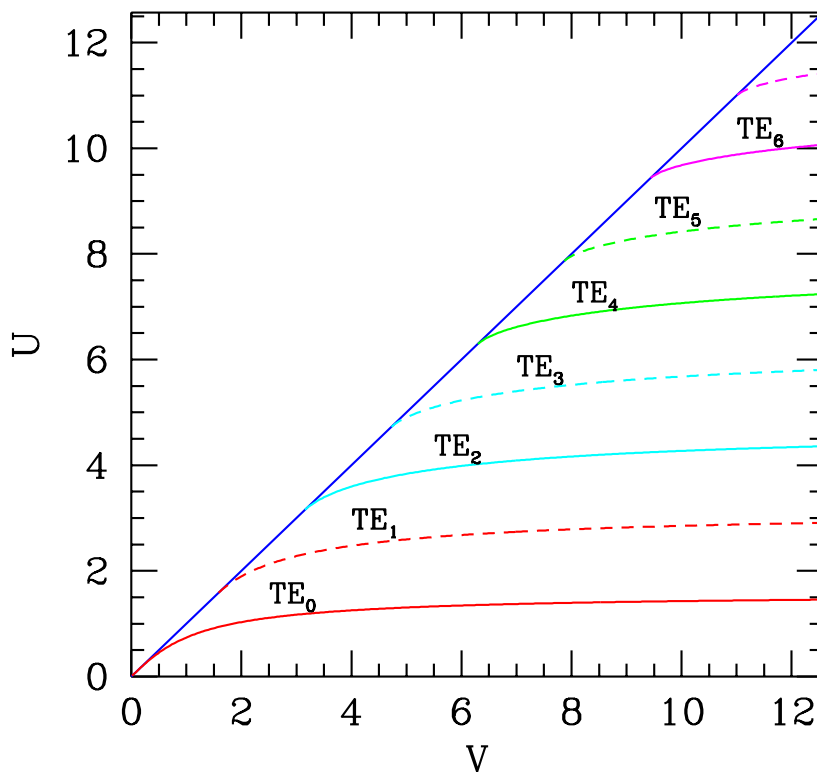


图 4.5: 平面介质波导中 TE_j 模式的本征值 U 对光纤参数 V 的依赖。 TE_j 模式的本征值从它们各自的截止频率 $V_c = j\pi/2$ 开始，随着 V 单调增加，最终趋于各自的极限值： $(j + 1)\pi/2$ 。

要获得具体的本征值，我们需要对于给定的 V 值，数值地求解本征方程 (4.95)。所有求出的本征值 $U(V)$ 通常会画在 $U - V$ 图上。在图 4.5 中，我们画出了平面波导中前几个 TE 模式的本征值对光纤参数 V 的依赖。由于 $U \leq V$ 并且其中的等号恰好对应于相应的截止频率，于是所有模式的曲线 $U(V)$ 都从其截止频率（它正好位于 $U - V$ 第一象限的对角线上）开始延伸。它们都是 V 的增函数，但是都位于第一象限的对角线以下。这些模式的截止频率从它们各自的截止频率 $V_c = j\pi/2$ 开始，随着 V 单调增加，最终趋于各自的极限值： $(j + 1)\pi/2$ 。相应的 TM 模式的截止频率与 TE 模式的非常类似，具有相同的截止频率和极限行为，只不过数值上要大一些（因为 $n_1 > n_2$ ）。

¶ 学习过（或者正在学习）量子力学的同学也许注意到了，我们这里讨论的本征方程与量子力学方势阱中的本征方程的高度相似性。这种相像性是由于我们这里的亥姆霍兹方程 (4.89) 与量子力学中的方势阱对应的波动方程（薛定谔方程）在形式上是完全相同的。我们这里的电磁场的纵向分量恰好与量子力学中的波函数相对应。我们这里的边条件也可以表述为电磁场的纵向分量及其导数在边界连续。这与量子力学中的波函数及其导数在方势阱边界连续完全一致。由此可见，由于方程和边条件在形式上都完全相同，我们这里得到的本征方程自然也与量子力学方势阱中的本征方程完全相同。

¶ 圆形介质波导

作为一个更为接近实际的光纤模型，我们下面来考虑所谓的圆形介质波导。我们假定介质波导的核心部分的截面是半径为 a 的圆而包层部分则一直延伸到无穷。我们选取柱坐标并将光纤的中心轴取为 z 轴。如果我们假定纵向场分量的解的形式为： $R(\rho)e^{im\phi - ikz}$ ，那么我们发现：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + \gamma^2 \right) R(\rho) = 0, & \text{对于 } \rho < a. \\ \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} - \beta^2 \right) R(\rho) = 0, & \text{对于 } \rho > a. \end{cases} \quad (4.96)$$

在柱坐标中，上述方程恰当的解可以写为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_z \\ \mathbf{H}_z \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_e \\ A_h \end{pmatrix} J_m(\gamma\rho)e^{im\phi}, & \text{对于 } \rho < a. \\ \begin{pmatrix} B_e \\ B_h \end{pmatrix} K_m(\beta\rho)e^{im\phi}, & \text{对于 } \rho > a. \end{cases} \quad (4.97)$$

在上面这个公式中，内部的场我们选择了贝塞尔函数 $J_m(z)$ 而在外部则选择了虚宗量贝塞尔函数 $K_m(z)$ 。这样能够保证在内部的解是有界的，在外部的解则随 ρ 的增加而指数衰减。

我们下一步需要做的是加上合适的边界条件从而进一步确定这些解的具体形式。这时我们可以发现圆形介质波导与前面讨论的金属波导以及平板介质波导的区别。在介质波导中，横向场仍然可以按照公式 (4.75) 用纵向场表达出来，这一点与金属波导完全相同；但是由于介质波导外部的场并不为零，因此横向电场将不仅仅依赖于纵向的电场，还依赖于纵向的磁场分量。对于磁场也是如此。因此，我们发现介质波导中所谓的横电波或

• • •

者横磁波 一般来说是耦合在一起的，无法将它们完全分开。以我们上面的尝试解 (4.97) 为例，我们可以利用公式 (4.75) 得到横向场量的具体表达式。将边界两侧电磁场的相应分量匹配起来就得到：

$$\begin{aligned} A_e J_m &= B_e K_m, \\ A_h J_m &= B_h K_m, \\ A_e \frac{imk}{\gamma^2 a} J_m - A_h \frac{\omega\mu_0}{\gamma} J'_m + B_e \frac{imk}{\beta^2 a} K_m - B_h \frac{\omega\mu_0}{\beta} K'_m &= 0, \\ A_h \frac{imk}{\gamma^2 a} J_m + A_e \frac{\omega\epsilon_0 n_1^2}{\gamma} J'_m + B_h \frac{imk}{\beta^2 a} K_m + B_e \frac{\omega\epsilon_0 n_2^2}{\beta} K'_m &= 0, \end{aligned}$$

其中的贝塞尔函数 J_m , J'_m 取值在 γa , K_m , K'_m 则取值在 βa 。上面四个连接条件分别来自于： \mathbf{E}_z , \mathbf{H}_z , \mathbf{E}_ϕ , \mathbf{H}_ϕ 在边界 $\rho = a$ 处的连续条件。显然，上面的四个连接条件可以写成关于四个系数： A_e , A_h , B_e 和 B_h 的齐次线性方程：

$$\begin{pmatrix} J_m & 0 & -K_m & 0 \\ 0 & J_m & 0 & -K_m \\ \frac{imk}{\gamma^2 a} J_m & -\frac{\omega\mu_0}{\gamma} J'_m & \frac{imk}{\beta^2 a} K_m & -\frac{\omega\mu_0}{\beta} K'_m \\ \frac{\omega\epsilon_0 n_1^2}{\gamma} J'_m & \frac{imk}{\gamma^2 a} J_m & \frac{\omega\epsilon_0 n_2^2}{\beta} K'_m & \frac{imk}{\beta^2 a} K_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_e \\ A_h \\ B_e \\ B_h \end{pmatrix} = 0. \quad (4.98)$$

该方程要有非零解就要求系数矩阵的行列式为零，于是我们得到：

$$\left(\frac{n_1^2}{\gamma} \frac{J'_m}{J_m} + \frac{n_2^2}{\beta} \frac{K'_m}{K_m} \right) \left(\frac{1}{\gamma} \frac{J'_m}{J_m} + \frac{1}{\beta} \frac{K'_m}{K_m} \right) = \frac{m^2}{a^2} \left(\frac{n_1^2}{\gamma^2} + \frac{n_2^2}{\beta^2} \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \right). \quad (4.99)$$

这个本征方程的另一个等价的写法是：

$$\left[\frac{J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] \left[\frac{J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{U K_m(U)} \right] = \left[\frac{mk}{n_1 k_0} \right]^2 \left[\frac{V}{UW} \right]^4, \quad (4.100)$$

其中我们运用了 (4.94) 中定义的符号。这个方程足够地复杂以至于并不能够直接写出解析解。但在一些特殊的情形下，我们仍然能够得到一系列重要的物理信息。

$m = 0$ 的情形

如果 $m = 0$ ，那么传输的电磁场对于角度 ϕ 没有依赖。本征方程 (4.99) 要求该方程左边的两个因子之一等于零。这两个因子等于零的条件实际上分别对应于介质波导中的 TE 波和 TM 波。要证明这一点，我们回到齐次方程 (4.98)。考察其系数矩阵我们发现：由于电磁场的耦合，一般来说在介质波导中并不存在纯粹的横电或者横磁模式，除非 $m = 0$ 。如果 $m \neq 0$ ，那么对应于齐次方程的非零解一定是既有纵向的电场，也有纵向的磁场，即 \mathbf{E}_z , \mathbf{H}_z 都不等于零。但是，当 $m = 0$ 时，由于系数矩阵的特殊形式，我们可以存在横电模式 ($\mathbf{E}_z = 0$) 和横磁模式 ($\mathbf{H}_z = 0$)，它们满


足的方程为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_1^2 J_1(U)}{U J_0(U)} + \frac{n_2^2 K_1(W)}{W K_0(W)} \right) &= 0 && \text{TM 模式。} \\ \left(\frac{1 J_1(U)}{U J_0(U)} + \frac{1 K_1(W)}{W K_0(W)} \right) &= 0 && \text{TE 模式。} \end{aligned} \quad (4.101)$$

其中我们利用了贝塞尔函数的性质: $J'_0 = -J_1$, $K'_0 = -K_1$ 。如果我们考虑这时的截止频率, 它对应于 $W \rightarrow 0$, $U \rightarrow V = V_c$ 的情形。考察方程 (4.100) 后我们发现, 无论是横电还是横磁模式, 其截止频率都由给出:

$$J_0(V_c) = 0, \implies V_c = x_n^{(0)}. \quad (4.102)$$

其中 $x_n^{(0)}$ 是函数 $J_0(x)$ 的第 n 个正实数零点。数值最小的一个对应于: $x_1^{(0)} \simeq 2.405$ 。与之相应的模式则记为: TE_{01} 和 TM_{01} , 其中第一个角标标志 $m = 0$; 第二个角标表示它对应于 U 的第一个 (最低的) 本征值。因此我们看到, 如果光纤参数满足: $0 < V < 2.405$, 那么纯粹的横电和横磁模式将无法在光纤之中传播。

 $m = 1$ 的情形

$m \neq 0$ 时的本征方程一般来说十分复杂, 我们将仅仅讨论 $m = 1$ 的情形。首先讨论它的截止频率。令方程 (4.100) 中 $U \rightarrow V = V_c$, $W \rightarrow 0$ 我们得到:

$$J_1(V_c) = 0. \implies V_c = x_n^{(1)}. \quad (4.103)$$

其中 $x_n^{(1)}$ 为函数 $J_1(x)$ 的第 n 个非负实数零点。由于函数 $J_1(0) = 0$, 因此我们发现这一系列模式中最低的一个模式的截止频率为零。这个模式一般称为 HE_{11} 模式。也就是说, HE_{11} 模式可以以任何频率传播, 不存在截止频率。 HE_{11} 模式的这个特性使得它是在 $0 < V < 2.405$ 这个区间上可以传播的唯一模式, 人们恰恰利用这个特性实现所谓的单模传播。¹⁸

我们这里虽然仅仅讨论了 $m = 0$ 和 $m = 1$ 的情形, 但是一般的情形也可以类似讨论。只不过要获得本征值的信息我们必须数值地求解本征方程 (4.100)。类似于平面介质波导的情形中的图 4.5, 求出的本征值 U 也可以画在 $U - V$ 图上。这些模式中只有 HE_{11} 模式是没有截止频率的, 其次低的是 TM_{01} 和 TE_{01} 模式。在弱导波导情形下关于圆形介质波导中各个模式更详细的讨论可以参考 [4] 中的 §4.8 节。



¹⁸单模传播的重要性来源于通信的需求。与多模传播相比较, 单模传播提供更加可靠和长距离的信息传输。

本章是主要处理的是平面电磁波在各种介质中传播所遇到的物理问题。我们的讨论主要针对的是均匀、线性、各向同性的介质。对于电磁波在非均匀介质中的传播则没有涉及。另外，对于电磁波在均匀各向异性介质（例如各种晶体）中的传播问题也没有讨论。做出这个省略的主要原因是晶体中的电磁波传播不可避免地与其对称结构有密切的关联。由于多数同学并没有系统地学习过固体物理的知识，我觉得这个课程中还是不要涉及比较好。对此有兴趣的同学可以参考 [11] 中比较详尽的讨论。我们对于波导的讨论是比较简略的¹⁹。波导在技术方面的应用是十分广泛的（同轴电缆、以太网、光纤等等）。有兴趣的同学可以参考相关方面的书籍。



¹⁹是的，虽然你们可能已经觉得很繁琐了，但仍然是相当简略的。

第五章

电磁波的辐射和散射

本章提要

- 电磁势波动方程的推迟解 (22)
- 谐振电荷和电流分布的电磁辐射 (23)
- 电偶极、磁偶极和电四极辐射 (24)
- 电磁波的多极场展开 (25)
- 电磁波的散射 (26)

前

一章我们讨论了电磁波在各种介质中传播时遇到的物理问题。这一章中我们将介绍一下电磁波是如何产生和辐射的。经典电动力学中电磁波的辐射大致可以分为两类：一类是由宏观的电磁场源的周期振荡所产生的，其典型的例子是我们日常生活中遇到的电视信号、通讯信号的辐射；另一类是由于微观带电粒子做加速或减速运动时产生的，这类辐射大量出现在快速粒子穿过物质或者人造的各种加速器中。本章将主要涉及第一类电磁波的辐射问题。第二类的电磁波辐射的性质将在后面（第八章）讨论，因为这类辐射所涉及到的微观粒子往往是相对论性的，所以必须在了解了狭义相对论和相对论电动力学以后再进行讨论。

本章中我们还会讨论电磁波的散射这一十分重要的物理现象。上一章中我们主要是讨论电磁波在没有任何“障碍”的空间中的传播问题。如果电磁波在传播中遇到障碍物，那么电磁波的传播就需要进行重新考虑。一般来说，电磁波的电磁场会与障碍物发生某种形式的相互作用，然后障碍物会反过来影响原先电磁波的传播。通常人们将电磁波绕过障碍物传播的现象称为**衍射**；而如果是障碍物受到电磁波的影响然后自身发射电磁波则被称为**散射**。由于衍射问题主要是光学所涉及的内容，同时我们的课时有限，因此我们这里不打算涉及。有兴趣的同学可以参考光学方面的经典著作 [15]。

22 电磁势波动方程的推迟解

¶ 我们的出发点是第一章第3节中得到的电磁势所满足的波动方程：

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t), \quad (5.1)$$

其中 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 代表标量势或者矢量势的分量，而 $f(\mathbf{x}, t)$ 则对应于已知的电荷密度分布或者电流密度分布。因此如果已经知道了电荷和电流分布，求解上面的波动方程就可以确定空间中任意时刻的电磁势。

为了求解波动方程 (5.1)，我们可以将所有函数对时间进行傅立叶变换，相应的傅立叶分量满足非其次的亥姆霍兹方程：

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega), \quad (5.2)$$

其中 $k^2 \equiv \omega^2/c^2$ 而 $\tilde{\Psi}$ 和 \tilde{f} 表示原来函数的傅立叶变换：

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \Psi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t}.$$

为了解这个非其次亥姆霍兹方程，我们首先应当设法得到相应的格林函数：

$$(\nabla^2 + k^2) G_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.3)$$

如果我们令 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ，那么我们得到格林函数只依赖于 \mathbf{R} 。具体的说，下列两种形式的解对于我们特别有用：¹

$$G_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\mathbf{R}) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}. \quad (5.4)$$

它们分别称为亥姆霍兹方程的推迟(上标+号的)格林函数和超前(上标-号的)格林函数。

上面得到的亥姆霍兹方程的格林函数 (5.4) 与波动方程的格林函数之间有着直接的联系。如果我们考虑相应的波动方程的含时格林函数 $G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ ，它们满足的方程是：

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (5.5)$$

¹ 满足方程 (5.3) 的格林函数可以写成： $AG_{\mathbf{k}}^{(+)} + BG_{\mathbf{k}}^{(-)} + g$ ，其中： $A + B = 1$ ，而 g 是齐次方程的解。

显然，波动方程的格林函数将仅仅依赖于时空坐标的差，即： $G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = G^{(\pm)}(R, \tau)$ ，其中 $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ， $\tau = t - t'$ 。利用亥姆霍兹方程的格林函数 (5.4)，波动方程的含时格林函数可以写成：

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau}. \quad (5.6)$$

这说明波动方程的格林函数的傅立叶分量恰好就对应于亥姆霍兹方程的格林函数。如果介质是不色散的，即： $k = \omega/c$ ，那么上面这个积分就给出 δ -函数：

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.7)$$

这个公式的物理意义十分明显，只有推迟格林函数才是符合 **物理因果律** 的解，因为它表示在任意一点 \mathbf{x} 处感受到的场是距离它 R 处的点 \mathbf{x}' 在 R/c 时间之前的信号传播过来的。

利用上面波动方程的格林函数，对于矢势 \mathbf{A} ，我们可以写出与推迟格林函数对应的解：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.8)$$

对于一个随时间变化的电荷分布，我们可以给出标势的一个类似公式。这些公式就是我们这一章讨论振荡电流密度分布所产生的电磁波的基本出发点。

23 谐振电荷和电流分布的电磁辐射

¶ 这一节中我们讨论谐振的电荷和电流密度分布所产生的电磁波辐射。由于任意时间依赖的函数总是可以进行傅立叶变换，所以我们这一节中的讨论也是一般含时变化的源产生电磁波的基础。本节中我们假设：²

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (5.9)$$

当然， $\rho(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 不是任意的，它们必须满足电荷守恒的连续方程的约束：

$$i\omega\rho(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (5.10)$$

谐振性的源产生的电磁势也是谐振的。由于电磁势满足洛伦兹规范，所以我们只要求出矢势，标势自然也就得到了。

²类似于前一章，所有复的变量的实部才是真正相应的物理量。

按照公式 (5.8)，我们可以将谐振的矢势振幅写出：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (5.11)$$

其中 $k = \omega/c$ 。这就是一个局域谐振电流分布在空间任意一点所产生的矢势的公式。

在讨论电磁波的辐射时，一般存在三个相关的长度：一个是集中在原点附近的电磁波的辐射源的尺度 d ；另一个是我们接收（或者说测量）电磁波的点与原点（辐射源）之间的距离 $r = |\mathbf{x}|$ ；第三个就是所辐射的电磁波的波长 λ 。按照上述三个尺度之间的相对关系，我们可将全空间分为下列三个区域：³

- 近场区（静态区）：它满足 $d \ll r \ll \lambda$ 。
- 中间区（感应区）：它满足 $d \ll r \sim \lambda$ 。
- 远场区（辐射区）：它满足 $d \ll \lambda \ll r$ 。

我们下面会发现，在不同的区域中电磁场也会具有不同的性状。一般来说，在近场区电磁场基本上是静态的电磁场；在远场区电磁场则是典型的辐射场（球面波）形式。

现在我们将辐射源与接收点之间的距离做泰勒展开：

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}',$$

其中 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 为 \mathbf{x} 方向的单位矢量。保留到最低阶，公式 (5.11) 中的分母可以仅仅取展开式中的第一项，也就是只保留 $1/r$ 的因子。这时我们得到的矢势为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}. \quad (5.12)$$

我们看到，在 $r \rightarrow \infty$ 的极限下（从而一定处于远场区），这样的矢势所代表的是一个典型的球面波，这个球面波的振幅一般来说是依赖于取向的（各向异性的）。求出了在远处的矢势，相应的电磁场可以从下列两式得到：

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (5.13)$$

其中 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 代表真空的 **波阻抗**。显然，在远处任意一点的电磁场一定是垂直于从原点指向该点的位置矢量，而且也具有球面波的形式。

如果辐射源所发射的电磁波的波长 λ 比辐射源典型的尺度 d 也要大很多，我们可以进一步利用下面的展开：

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots \right) (1 - ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') + \dots), \quad (5.14)$$

³我们假设任何电磁波的接受者不会有必要与辐射源非常亲密接触，因此我们总是假定观测点到源的距离远大于辐射源的尺度： $r \gg d$ 。

其中首项贡献 e^{ikr}/r 后面的第一个括号内的项来自 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 的展开；第二个括号内的项来自相因子 $e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ 的展开。这被称为 **长波近似**。将这个展开式代入矢势的表达式 (5.11)，它领头的几项分别对应于电偶极、磁偶极和电四极辐射。这三类辐射的物理性质我们将在下节中更详细地讨论。长波近似对于很多实际的应用都是很好的描述，例如：无线广播的电磁波（短波的典型波长为几十米，发射源的尺度一般小于这个尺度）、原子的光辐射（尽管这本质上是个量子问题）等等。但是大家所熟悉的手机之间的无线通信所使用的电磁波的波长比较短（厘米到十厘米量级），因此对于手机发射塔使用长波近似一般来说是不太合适的。

24 电偶极、磁偶极和电四极辐射

24.1 电偶极辐射

¶ 如果我们仅仅保留展开式 (5.14) 中的 **首项**，我得到的矢势为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}').$$

这个公式中的积分可以利用我们讨论静磁学时（第 14 节）的方法来化简：

$$\int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = - \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) = -i\omega \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'),$$

其中第二步来自于电荷守恒的连续性方程。注意到最后的积分正好是该辐射源的电偶极矩 \mathbf{p} （确切地说，辐射源的电偶极矩也是随时间谐振的，这里的电偶极矩 \mathbf{p} 实际上是系统谐振的复电偶极矩的振幅），所以我们得到：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{5.15}$$

要求出相应的电磁场，我们可以利用以下的矢量分析的公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times [\psi \mathbf{A}] = \nabla \psi \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A}, \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \\ \nabla \cdot [\mathbf{n}f(r)] = \frac{2f}{r} + f'(r), \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla)[\mathbf{n}f(r)] = \frac{f(r)}{r} [\mathbf{A} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})] + f'(r)\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}). \end{array} \right. \tag{5.16}$$

相应的偶极电磁场为：⁴

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \\ \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right\}, \end{array} \right. \tag{5.17}$$

⁴这里我们选择写出磁场 \mathbf{H} 而不是 \mathbf{B} ，这样公式中就不会总出现 μ_0 的因子了。

这个公式所代表的电磁场被称为 **电偶极辐射场**。相应的辐射被称为 **电偶极辐射**。需要注意的是，电偶极辐射场中的磁场总是与径向 \mathbf{n} 垂直的，但是电场在近场区可以有平行于 \mathbf{n} 的分量。事实上，在近场区电场趋于一个静态的偶极场。在无穷远的地方，无论电场还是磁场都体现出典型的辐射场的特性，即它们都与径向 \mathbf{n} 垂直而且其振幅也是典型的球面波的形式：

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad (5.18)$$

其中 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为真空的 **波阻抗**。

¶ 一个重要的物理量是辐射功率的角度分布。在某个指定方向 \mathbf{n} 的立体角 $d\Omega$ 中辐射的功率可以通过相应的玻印廷矢量获得：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \text{Re} [r^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]. \quad (5.19)$$

对于电偶极辐射，我们得到：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}|^2 = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta. \quad (5.20)$$

其中第二个等号成立的条件是假定电偶极矩 \mathbf{p} 的不同分量之间没有位相差，而 θ 是 \mathbf{n} 与 \mathbf{p} 之间的夹角。电偶极辐射的总辐射功率可以将上式对于角度积分得到：

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{p}|^2. \quad (5.21)$$

我们看到电偶极辐射的特性是：辐射的功率与辐射的频率的 4 次方成正比；其角分布与观测点处的位置矢量与电偶极矩的夹角正弦的平方成正比。

24.2 磁偶极辐射

¶ 如果我们考虑展开式 (5.14) 中的下一项，也就是说我们分别取了 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 和 $e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ 中的次级项，我们得到：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int d^3 \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}').$$

这个式子的被积函数可以分为关于 \mathbf{J} 和 \mathbf{x}' 对称和反对称的两个部分，即：

$$(\mathbf{n}_j \mathbf{x}'_j) \mathbf{J}_i = \frac{1}{2} \mathbf{n}_j (\mathbf{x}'_j \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_j \mathbf{x}'_i) + \frac{1}{2} \mathbf{n}_j (\mathbf{x}'_j \mathbf{J}_i - \mathbf{J}_j \mathbf{x}'_i), \quad (5.22)$$

上式中的反对称的部分（等式右方的第二项）对空间积分以后显然可以用体系的磁矩 \mathbf{m} 来表达（参见第三章中体系磁矩的定义式 (3.19)）。所以，如果仅仅考虑反对称部分的贡献，我们可以将矢势写成：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (5.23)$$

这个矢势的表达式与上一节中的电偶极辐射的磁场 \mathbf{H} 的表达式（参见公式 (5.17)）十分类似。所以我们得知这时的磁场应当与电偶极辐射时的电场十分类似。我们得到相应的电场和磁场为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{Z_0}{4\pi} k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right\}, \end{aligned}$$

满足上面公式的电磁场被称为 **磁偶极辐射场**，相应的电磁辐射称为 **磁偶极辐射**。我们看到磁偶极辐射的公式与电偶极辐射的公式十分类似，只不过两种辐射的偏振行为是不同的。形式上讲，两种辐射的公式可以通过如下的替换相互转换： $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}/c$ ， $\mathbf{E} \rightarrow Z_0 \mathbf{H}$ ， $Z_0 \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ 。

由于公式上的类似性，磁偶极辐射的辐射功率的角分布与电偶极辐射完全类似。也就是说我们有：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 k^4}{32\pi^2} |(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n}|^2 = \frac{Z_0 k^4}{32\pi^2} |\mathbf{m}|^2 \sin^2 \theta. \quad (5.24)$$

其中 θ 是 \mathbf{n} 与 \mathbf{m} 之间的夹角。磁偶极辐射的总辐射功率为：

$$P = \frac{Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{m}|^2. \quad (5.25)$$

24.3 电四极辐射

¶ 下面我们来讨论前面公式 (5.22) 中的对称化的一项。我们可以利用分部积分的方法将它化为：

$$\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] = -\frac{i\omega}{2} \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'),$$

其中我们还利用了电荷守恒的连续方程： $\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho$ 。于是，对称部分对于矢势的贡献为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'). \quad (5.26)$$

得到了矢势原则上就可以得到任意一点的电磁场，只不过具体的公式有些罗嗦。如果我们仅仅考虑 **远场区** 的电磁场，那么得到的公式是比较简单的：

$$\mathbf{B} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = ikZ_0(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}/\mu_0. \quad (5.27)$$

满足这些性质的辐射场被称为 **电四极辐射场**，相应的辐射称为 **电四极辐射**。这种名称的原因是上面公式中的电磁场可以用辐射源的 **电四极矩** 表达成：⁵

$$\mathbf{H} = -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}), \quad (5.28)$$

其中 \mathbf{D} 是辐射源的电四极矩张量，其表达式为：

$$\mathbf{D}_{ij} = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') [3\mathbf{x}'_i\mathbf{x}'_j - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')\delta_{ij}]. \quad (5.29)$$

电四极辐射的辐射功率角分布可以写成：

$$\frac{dP}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1152\pi^2} |[\mathbf{n} \times (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})] \times \mathbf{n}|^2. \quad (5.30)$$

我们看到电四极辐射的角分布是比较复杂的。要得到总的功率，就必须将上式中的模方展开然后对于角度积分。对于角度的积分需要一些技巧，不过经过一些初等的运算，我们得到：⁶

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1440\pi} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*. \quad (5.31)$$

电四极辐射的特点是它的辐射功率与辐射频率的 6 次方成正比。

25 辐射场的多极场展开

上一节中我们处理多级展开的方式就是简单地将 $e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 进行泰勒展开。这种处理方法对于低阶的多级辐射是可以接受的，但是对于高阶的修正就比较困难了。系统的处理方法是利用球面波来进行展开，这就导致所谓的 **多极场展开**。这一节中我们将简要介绍这种方法。这里的讨论十分类似我们在静电学的第 11 节中对于静电多极展开的讨论。在静电学中，我们需要展开的函数是拉普拉斯方程的格林函数 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 。虽然这个函数也可以利用普通的泰勒展开进行处理，但是更为严格的处理方法是利用加法公式 (2.36) 从而得到严格的静电多极展开式。现在我们需要展开的函数是亥姆霍兹方程的格林函数 $e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ ，因此我们需要一个推广的加法公式。另外，辐射问题需要处理的是矢量场而不像静电问题中的标量场（静电势），因此这个展开也不可避免地更为复杂，这样才能够将矢量场的偏振信息表征出来。

⁵注意在下列几个公式中，我们用 \mathbf{D} 来表示辐射源的电四极矩张量，应当不至于和电位移矢量混淆。由于 \mathbf{D} 是一个张量，所以 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ 仍然是一个矢量。具体地说，它的分量为： $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})_i = \mathbf{D}_{ij} n_j$ 。

⁶这个公式中重复的脚标表示对其求和。

25.1 亥姆霍兹方程的格林函数

¶ 我们首先讨论亥姆霍兹方程的格林函数按照球面波的展开。无边界空间的亥姆霍兹方程的格林函数满足：

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (5.32)$$

它的解为：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} . \quad (5.33)$$

这个格林函数可以按照球坐标中的完备的函数集： $h_l^{(1/2)}(kr)Y_{lm}(\mathbf{n})$ 来进行展开：

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = ik \sum_{l,m} j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)Y_{lm}^*(\mathbf{n}')Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (5.34)$$

其中的 j_l , $h_l^{(1)}$ 为相应的 **球贝塞尔函数**， $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 为球谐函数， $r_<$, $r_>$ 分别表示 $|\mathbf{x}|$ 和 $|\mathbf{x}'|$ 中较小和较大的一个。这个表达式可以看成是第 9.3 小节中加法定理 (2.36) 的推广，因此这个公式又称为球面波的 **加法定理**。

为了下面讨论的方便，我们引入 **轨道角动量算符** $\hat{\mathbf{L}}$ 如下：

$$\hat{\mathbf{L}} = (-i)(\mathbf{x} \times \nabla) , \quad (5.35)$$

我们特地在算符的上面加了一个“ $\hat{}$ ”是为了提醒大家它是一个 **微分算符**，不是通常的物理量。矢量算符 $\hat{\mathbf{L}}$ 满足一系列十分重要的性质。⁸ 首先，它实际上仅仅作用于球坐标中的角度部分，对于径向部分没有影响。这个性质可以描写为：

$$\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0 . \quad (5.36)$$

另外，这个矢量算符的三个分量中的任意两个不能交换次序，或者说不可对易。事实上，它们满足下列的基本 **对易关系**：

$$[\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{L}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{L}}_k , \iff \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hat{\mathbf{L}} . \quad (5.37)$$

但是，如果我们构建角动量算符的平方（算符） $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ ，那么可以证明它可以与任意一个角动量分量交换：

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}_i] = 0 . \quad i = 1, 2, 3 . \quad (5.38)$$

⁷对于球贝塞尔函数已经多年没有亲近过的同学，建议参考 [13] 中相应的章节。

⁸在量子力学中所有的物理量都演变为算符。因此我们这里引进的轨道角动量算符实际上就是量子力学中的轨道角动量。因此，对于学习过量子力学的同学来说，这些性质应当是十分基本的。

事实上，这个算符就是我们在第 9.3 小节中引进的 **角动量平方算符**（即公式 (2.29)），它的本征函数就是球谐函数：

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\mathbf{n}) = l(l+1) Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (5.39)$$

利用角动量平方算符，我们可以将球坐标中的拉普拉斯算符写为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2}. \quad (5.40)$$

这些性质我们在下面讨论多极场展开时会用得到。

25.2 多极场的定义与多极场展开

考虑无源的、自由空间中的麦克斯韦方程。如果我们假定所有场对于时间的依赖都是谐变的： $e^{-i\omega t}$ ，那么我们很容易发现电磁场满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H} \end{cases} \quad (5.41)$$

其中 $k = \omega/c$ 为波数， $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为真空中的波阻抗。当然，如果愿意我们也可以交换电场和磁场的位置得到：

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{H} = -\frac{i}{Z_0 k} \nabla \times \mathbf{E} \end{cases} \quad (5.42)$$

由于电磁场的任意一个分量都满足亥姆霍兹方程，因此它们一定可以利用如下的形式展开：

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{lm} \left[A_{lm} h_l^{(1)}(kr) + B_{lm} h_l^{(2)}(kr) \right] Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (5.43)$$

其中 Ψ 表示电磁场的任意一个分量， A_{lm} ， B_{lm} 是待定的系数。我们需要注意的一点是，电磁场还分别满足散度为零的条件。因此，我们必须将电场（或者磁场）的三个分量合适地匹配起来，使得得到的矢量场满足散度为零的条件。现在注意到： $\nabla^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{x} \cdot \nabla^2 \mathbf{E} + 2\nabla \cdot \mathbf{E}$ ，以及对于磁场的类似表达式，我们发现：

$$(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}) = 0. \quad (5.44)$$

也就是说， $\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}$ ， $\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}$ 都满足标量的亥姆霍兹方程。

我们现在定义一个 (l, m) 阶的 **磁多极场** 满足：

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_{lm}^{(M)}(\mathbf{x}) = \frac{l(l+1)}{k} g_l(kr) Y_{lm}(\mathbf{n}) \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(M)}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

其中的 $g_l(kr)$ 是 l 阶球贝塞尔函数的线性叠加:

$$g_l(kr) = A_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr). \quad (5.46)$$

我们看到, 一个磁多极场的电场部分不包含径向的分量, 它仅仅包含横向分量。利用公式 (5.42) 中的第二个方程我们可以得到:

$$Z_0 k \mathbf{x} \cdot \mathbf{H} = (-i) \mathbf{x} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = (-i) (\mathbf{x} \times \nabla) \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{E}.$$

于是我们发现磁多极场的电场满足:

$$\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(M)}(\mathbf{x}) = l(l+1) Z_0 g_l(kr) Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (5.47)$$

这个公式实际上暗示我们磁多极场的电场和磁场部分可以写成:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{lm}^{(M)}(\mathbf{x}) = Z_0 g_l(kr) \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\mathbf{n}) \\ \mathbf{H}_{lm}^{(M)}(\mathbf{x}) = -\frac{i}{k Z_0} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^{(M)} \end{cases} \quad (5.48)$$

这样就完成了磁多极场的定义。完全类似的, 我们可以定义 (l, m) 阶的 **电多极场**。它们由下式给出:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{lm}^{(E)}(\mathbf{x}) = f_l(kr) \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\mathbf{n}) \\ \mathbf{E}_{lm}^{(E)}(\mathbf{x}) = \frac{i Z_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}_{lm}^{(E)} \end{cases} \quad (5.49)$$

其中的径向函数 $f_l(kr)$ 类似于 $g_l(kr)$, 也是 l 阶球贝塞尔函数的线性叠加。

由于多极场的定义中总是涉及: $\hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\mathbf{n})$, 因此我们定义一个简化的符号:

$$\mathbf{X}_{lm}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (5.50)$$

大家可以证明它满足如下的正交归一关系:

$$\int \mathbf{X}_{l'm'}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{X}_{lm}(\mathbf{n}) d\Omega_{\mathbf{n}} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (5.51)$$

$$\int \mathbf{X}_{l'm'}^*(\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{X}_{lm}(\mathbf{n})) d\Omega_{\mathbf{n}} = 0. \quad (5.52)$$

可以证明, 上面定义的电多极场和磁多极场一道, 构成了无源空间的麦克斯韦方程 (也就是矢量波动方程) 解的一组 **完备函数基**。因此, 任何无源空间满足麦克斯韦方程的

○ ○ ○ ○ ○

电磁场都可以按照电磁多极场来展开:

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \sum_{lm} \left[a_E(l, m) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} a_M(l, m) \nabla \times g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right] \\ \mathbf{E} = Z_0 \sum_{lm} \left[\frac{i}{k} a_E(l, m) \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + a_M(l, m) g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right] \end{cases} \quad (5.53)$$

这个展开式被称为辐射场的 **多极场展开**。展开式中的系数 $a_E(l, m)$ 和 $a_M(l, m)$ 分别被称为 **电多极场系数** 和 **磁多极场系数**，它们标志了电磁场中包含的某一阶的电多极场和磁多极场成分的多少。它们的具体数值可以由下式给出:

$$a_M(l, m) g_l(kr) = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^*(\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}) d\Omega, \quad (5.54)$$

$$Z_0 a_E(l, m) f_l(kr) = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^*(\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}) d\Omega. \quad (5.55)$$

如果产生辐射的源的分布已知，可以想象它们可以由源的分布来求出。我们这里不打算列出这些公式，有兴趣的同学可以参考 [5] 中的相关章节。

25.3 多极辐射的功率

¶ 这一小节中我们简要讨论一下不同阶的多极场所辐射的功率。考虑远离辐射源的辐射区域，这时的辐射场 (5.53) 可以写成:

$$\begin{cases} \mathbf{H} \rightarrow \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{lm} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} + a_M(l, m) \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}], \\ \mathbf{E} \rightarrow Z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \end{cases} \quad (5.56)$$

于是，我们可以计算出辐射功率的角分布为:

$$\frac{dP}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{Z_0}{2k^2} \left| \sum_{lm} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} \times \mathbf{n} + a_M(l, m) \mathbf{X}_{lm}] \right|^2. \quad (5.57)$$

这个公式显示出来了电多极场与磁多极场的特点：它们的辐射功率的角分布是相同的，不同的是其偏振行为。如果某个辐射源仅仅包含单一的 (l, m) 阶的多极场，那么功率分布为:

$$\frac{dP(l, m)}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{Z_0}{2k^2} |a(l, m)|^2 |\mathbf{X}_{lm}|^2. \quad (5.58)$$

利用 \mathbf{X}_{lm} 的定义我们可以将它的模方明显地用球谐函数表达出来:

$$\frac{dP(l, m)}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{Z_0 |a(l, m)|^2}{2k^2 l(l+1)} \left[\frac{(l-m)(l+m+1)}{2} |Y_{l, m+1}|^2 + \frac{(l+m)(l-m+1)}{2} |Y_{l, m-1}|^2 + m^2 |Y_{lm}|^2 \right]. \quad (5.59)$$

如果我们感兴趣总的辐射功率, 那么由于 \mathbf{X}_{lm} 的基本性质, 我们发现总功率就是各个多极场辐射功率的和:

$$P = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{lm} [|a_E(l, m)|^2 + |a_M(l, m)|^2]. \quad (5.60)$$

¶ 多极场辐射的一个应用是在宇宙学关于微波背景辐射的测量中。按照目前的宇宙学模型, 我们的宇宙来源于很久以前的一次大爆炸。这个大爆炸的遗迹就是在宇宙空间存留下来的微波背景辐射。这是一个很严格符合普朗克黑体辐射谱的黑体辐射, 相应的温度约为 2.7K。实验表明微波背景辐射在空间上基本上是各向同性的。其各向异性大约只有 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 的量级。对微波背景辐射各向异性的测量有助于我们理解宇宙早期的行为, 因此在宇宙学上是十分重要的。正在运行的 WMAP 实验实际上就是通过测量微波背景辐射的辐射功率按照多极场展开的分布, 进一步可以告诉我们宇宙早期的一些重要物理性质。

26 电磁波的散射

¶ 我们在上一章中讨论了电磁波在均匀介质中的传播问题。从微观上讲, 任何介质都存在某种不均匀性。具体的说, 构成它的微观粒子的热运动必然导致涨落现象。这些涨落在很多情形下可能是可以忽略的, 但是对于某些特殊情况, 这些微观涨落可以对其中传播的电磁波造成宏观可观测的影响。电磁波的散射就是其中一个例子。

我们将仅仅讨论电磁波散射的最简单的例子。如果在电磁波传播的区域存在某些微小粒子, 它们可以是气体分子、也可以是具有宏观尺度的颗粒(例如空气中的浮尘等等), 这些颗粒被统称为 **散射者**。如果散射者的尺度远远大于电磁波的波长, 散射者对于电磁波的影响基本上可以利用几何光学近似来处理。但是, 如果散射者的尺度远远小于电磁波的波长, 那么电磁波的波动性就十分显著。我们这里将主要讨论这种情形。

26.1 散射问题的一般描述

对于入射到散射者上面的电磁波来说, 如果散射者的尺度远远小于波长, 那么散射者所感受到的电磁场可以认为是空间均匀的, 随时间谐振的电磁场。这些散射者会对这些

外加的电磁场产生响应，感生出相应的（同时也是随时间谐振的）电偶极矩、磁偶极矩、电四极矩等等。于是，散射者就成为一个电磁波的谐振辐射源，它们会向周围发射电磁波。在远离散射者的空间中的任意一点，电磁场实际上是原先在空间传播的电磁波所产生的电磁场与这些散射者所辐射的电磁波的电磁场的线性叠加（这种叠加可以是相干的叠加）。为了明确起见，我们总是假定入射的电磁波为平面波：

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{H}_{\text{inc}} = \frac{1}{Z_0} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (5.61)$$

其中 $k = \omega/c$ 为入射电磁波的波数， $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为真空的波阻抗。空间的电磁场可以写为入射波与散射波的叠加：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{sc}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_{\text{sc}}, \quad (5.62)$$

对于局域的散射者的集合，散射波在远离散射者的空间自然地都是向外的球面波。

在散射问题中，一个重要的物理量就是所谓的散射截面。如果入射波的方向是 \mathbf{n}_0 ，它的偏振方向为 \mathbf{e}_0 ，那么单位入射波的能量流所产生的散射波在方向 \mathbf{n} 的立体角中并且具有偏振方向 \mathbf{e} 的辐射波功率被称为相应的微分散射截面，即：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}; \mathbf{n}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{r^2 \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{sc}}|^2}{\frac{1}{2Z_0} |\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}|^2}. \quad (5.63)$$

显然，它具有“面积”的量纲（所以称为截面）。在空间某个方向以及某个特定偏振的微分散射截面的大小体现了散射者将入射电磁波散射到该指定方向角和偏振的概率大小。某个指定方向角和偏振的微分截面越大，说明向该方向角和偏振方向的散射越强烈。将微分散射截面对立体角积分，我就得到总的散射截面。

26.2 偶极散射

做为一个例子，我们考虑空间一个半径为 a 的介质小球，其介电常数为 ϵ ，磁导率为 μ 。现在我们将这个介质小球放在有电磁波传播的区域中。我们将假设空间的电磁波是一个单频平面电磁波，而且它的波长远大于小球的半径，即： $ka \ll 1$ ，其中 $k = \omega/c$ 是电磁波的波数大小。在这个长波极限下，电介质小球所感受到的电磁场可以认为是一个空间均匀电磁场。于是，利用我们静电、静磁学中的讨论（参见第 ?? 章中例题 2.2 中的公式 (2.38) 以及相应的静磁学的结果），我们可以知道在电磁场中介质小球所感生的电偶极矩和磁偶极矩分别为：

$$\mathbf{p} = 4\pi \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) a^3 \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad \mathbf{m} = 4\pi \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \right) a^3 \mathbf{H}_{\text{inc}}, \quad (5.64)$$

其中 \mathbf{E}_{inc} 和 \mathbf{B}_{inc} 是入射电磁波的复振幅。散射者处感生出如公式 (5.64) 所描述的电偶极矩和磁偶极矩, 这些感生的偶极矩就会向空间发射电偶极辐射或磁偶极辐射。由于我们假设了电磁波的波长比起散射者的尺度大得多, 因此更高阶的辐射往往是可以忽略的。也就是说, 在远离散射者的地方, 散射波的电磁场可以写成:

$$\mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{m}/c], \quad \mathbf{H}_{\text{sc}} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{sc}}/Z_0. \quad (5.65)$$

对于我们目前考虑的例子, 微分散射截面可以写成:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}; \mathbf{n}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot \mathbf{m}/c|^2. \quad (5.66)$$

现在我们可以将感生的电偶极矩和磁偶极矩的表达式代入得到:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \mathbf{e}; \mathbf{n}_0, \mathbf{e}_0) = k^4 a^6 \left| \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0) + \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{e}^*) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_0) \right|^2.$$

(5.67)

这个公式体现了长波散射和偶极散射的特性。散射界面正比于频率的 4 次方, 同时散射波的偏振方向也具有完全确定的特性。下面我们举两个例子来说明偶极散射的特点。

例题 5.1 非磁性介质球 作为上面得到的偶极散射的微分截面的一个例子, 我们考察一个半径为 a 的非磁性介质球的偶极散射截面。这相当于令公式 (5.67) 中的 $\mu_r = 1$ 。

解: 我们假定入射波的波矢方向 \mathbf{n}_0 沿着 $+z$ 方向, 散射波的波矢方向 \mathbf{n} 与 \mathbf{n}_0 的夹角为 θ 。矢量 \mathbf{n}_0, \mathbf{n} 确定的平面通常被称为这个散射过程的 **散射平面**。为了方便我们将散射平面取为 xz 平面。入射波一般是非极化的, 散射波可以分为平行于散射平面和垂直于散射平面两种极化行为。再对入射波的偏振进行平均以后, 我们可以写出这两种散射波极化状态的微分散射截面:

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \cos^2 \theta, \quad \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2, \quad (5.68)$$

一般我们会定义散射波的 **偏振度** $\Pi(\theta)$:

$$\Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}. \quad (5.69)$$

按照这个定义, 电介质球的偶极散射的偏振度为:

$$\Pi(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (5.70)$$

也就是说, 在 $\theta = \pi/2$ 的方向散射波是完全极化的 (沿着垂直于散射平面的方向); 在 $\theta = 0, \pi$ 的方向, 散射波是完全非极化的。

如果我们不关心散射波的极化情形, 我们可以将两种极化的截面相加得到总的微分散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right). \quad (5.71)$$

这个截面在 $\theta = \pi/2$ 的方向取极小值而在 $\theta = 0, \pi$ 的方向取极大值。对立体角积分可以得到总的散射截面

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \quad (5.72)$$

搞定

例题 5.2 理想导体球的偶极散射 作为上面得到的偶极散射的第二个例子, 我们考察一个半径为 a 的理想导体球的偶极散射截面。这相当于令公式 (5.67) 中的 $\epsilon_r = \infty$, $\mu_r = 0$ 。

解: 选取与上例同样的坐标系, 经过计算我们得到两种偏振的微分截面为:

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right)^2, \quad \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2, \quad (5.73)$$

相应的偏振度为:

$$\Pi(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta}{5(1 + \cos^2 \theta) - 8 \cos \theta}. \quad (5.74)$$

非极化的微分截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left[\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right]. \quad (5.75)$$

搞定

¶ 长波极限下的电磁波散射的特性可以用来解释我们看到的蓝天,⁹ 这首先是瑞利 (John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh) 注意到的,¹⁰ 因此它又被称为 **瑞利散射**。太阳光的频谱是一个连续谱, 它照射到地球以后进入地球的大气层中就会受到气体分子的散射。对于可见光波段来说, 电磁波的波长远大于气体分子的尺度, 因此我们前面讨论的长波偶极散射的理论可以相当好地运用到阳光的散射问题中来。偶极散射截面的公式告诉我们, 频率较高的光将比较多地被散射掉, 这就是为什么我们白天看到的晴天呈蓝色 (假设污染不严重)。如果是在一个没有大气的星球 (例如在月球上就是如此), 当你抬头仰望天空的时候, 即使是在白天, 你看到的也将是黑暗, 除非你正好正视太阳。同样是由于大气分子散射的原因, 日出和日落时候太阳会显得更红。如果你有幸在环绕地球的卫星上看日出和日落, 那么它会显得比地面上更红一些, 因为这时太阳光穿过大气层的距离更长, 从而蓝光的成分会被更多地散射掉。

⁹如果我们还有幸能够看到的话...

¹⁰我们这里只是给了蓝天一个简化的解释。完整的诠释应当考虑空气分子的随机涨落并结合统计物理的方法。有兴趣的读者可以参考 [5]。

不仅仅天空的颜色可以很好地用瑞利散射来解释，天空漫散射的自然光的偏振行为也可以很好地用介质球的偶极散射来解释。如果我们拿一片偏振片去观察天空的漫散射光，我们会发现它多数情形下是偏振的。按照公式 (5.68)，散射光的偏振度在 $\theta = \pi/2$ 时最大，这一点的确可以在观察漫散射光的过程中验证。我们发现如果我们沿着垂直于太阳光线的方向观察天空的漫散射光，它一般具有最大的偏振度。

26.3 散射问题的多极场展开

按照我们前面的讨论，散射问题中入射的电磁波是平面波，但是散射波一般是球面波（假设散射者的三维尺度都比较小）。对于球面波来说，我们第 25 节讨论的多极场展开是十分方便的。散射问题与前面讨论的简单辐射问题不同的是，散射者作为辐射源的特性不是已知的，而是依赖于入射的电磁波。因此，为了建立这种联系，我们需要知道如何将入射的平面波用球面波来展开。

如果考虑的仅仅是标量的平面波，这个展开式是十分简单的：

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\gamma) = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (5.76)$$

其中 γ 是波矢 \mathbf{k} 与 \mathbf{x} 之间的夹角； $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ 则分别表示波矢 \mathbf{k} , \mathbf{x} 方向的单位矢量。这个公式在研究量子力学散射问题中将会经常用到。

在经典电磁波散射中我们需要的是更为复杂的矢量平面波的展开。我们将入射的平面波写为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{ikz}, \quad c\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E} = \mp i\mathbf{E}, \quad (5.77)$$

其中我们将平面波的波矢方向选为 $+z$ 方向并且选取了左旋和右旋偏振（对应于上式中的上面和下面的符号）。为了方便，我们选取了入射的平面波的振幅取为 1。要展开这样具有确定偏振的矢量平面波我们需要第 (25.2) 小节引入的多极场 \mathbf{X}_{lm} 。由于平面波在全空间都是有界的，因此这个展开式中一定仅仅包含 $j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}$ 和 $\nabla \times j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}$ 。为了确定展开的系数，我们需要利用 \mathbf{X}_{lm} 的下列性质：

$$\begin{aligned} \int [f_l(r)\mathbf{X}_{lm'}]^* \cdot [g_l(r)\mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= f_l(r)g_l(r)\delta_{ll'}\delta_{mm'} \\ \int [f_l(r)\mathbf{X}_{lm'}]^* \cdot [\nabla \times g_l(r)\mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= 0 \\ \frac{1}{k^2} \int [\nabla \times f_l(r)\mathbf{X}_{lm'}]^* \cdot [\nabla \times g_l(r)\mathbf{X}_{lm}] d\Omega & \\ = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \left(f_l^* g_l + \frac{1}{(kr)^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r f_l^* \frac{\partial}{\partial r} (r g_l) \right] \right) & \end{aligned} \quad (5.78)$$

其中的 $f_l(r)$ 和 $g_l(r)$ 都是任意球贝塞尔方程的解（即 $j_l(kr)$ 和 $n_l(kr)$ 的线性组合）。上面的第一个关系就是 \mathbf{X}_{lm} 的正交归一关系；第二个和第三个可以利用梯度算符的下列表达

式证明之：

$$\nabla = \frac{\mathbf{x}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \mathbf{x} \times \mathbf{L}. \quad (5.79)$$

总之，利用性质 (5.78) 我们可以得到矢量平面波按照多极场展开的结果：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \\ \mathbf{cB}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\frac{-i}{k} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \mp i j_l(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \end{aligned} \quad (5.80)$$

上式中上下两个符号的选取分别对应于平面波 (5.77) 中的上下两个符号所确定的偏振方向。这个展开式被称为矢量平面波的 **多极场展开**，又称为矢量平面波的 **分波展开**。

对于散射波，我们期待类似于 (5.80) 的展开式也存在，只不过其中的球贝塞尔函数会换成 $h_l^{(1)}(kr)$ 。因此我们可以写出：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{\beta_{\pm}(l)}{k} \nabla \times h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \\ \mathbf{cB}_{\text{sc}}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{\pi(2l+1)} \left[\frac{\alpha_{\pm}(l)}{ik} \nabla \times h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \mp i \beta_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

这就是散射波的最为一般的 **多极场展开**，它又被称为散射波的 **分波展开**。其中的系数 $\alpha_{\pm}(l)$ ， $\beta_{\pm}(l)$ 必须由入射波和散射波在散射者的边界上面的具体边条件来确定。

¶ 有了上述平面波和散射波的多极场展开式，现在我们来讨论电磁波被一个半径为 a 的球体散射的问题。这个问题看起来貌似简单，实际上是一个十分复杂的问题。如果我们仅仅满足于长波极限下的主要贡献，那么仅仅考虑偶极散射就已经足够了。也就是说，这个问题在长波极限下的一个近似解我们已经在第 26.2 小节讨论过了。如果要求解更高阶的贡献，就需要我们前面引进的多极场展开了。

首先我们看到，一旦有了入射和散射波的多极场展开，我们就可以计算电磁波被散射过程中的散射功率和吸收功率了。散射功率是仅仅由 **散射波** 所造成的、向外球面波所辐射的功率。而吸收功率则是由全部的（包括入射和散射）向内的球面波所贡献的功率。我们假定散射者是一个半径为 a 的小球，那么我们有：

$$P_{\text{sc}} = -\frac{a^2}{2\mu_0} \int \mathbf{E}_{\text{sc}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\text{sc}}^*) d\Omega_{\mathbf{n}}, \quad (5.82)$$

$$P_{\text{abs}} = \frac{a^2}{2\mu_0} \int \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}^*) d\Omega_{\mathbf{n}}. \quad (5.83)$$

将前面的多极场展开带入并且利用多极场的基本性质，我们可以完成对于立体角的积分从而得到相应的散射截面（即散射功率除以入射波的能流）：

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{sc}} &= \frac{\pi}{2k^2} \sum_l (2l+1) [|\alpha(l)|^2 + |\beta(l)|^2], \\ \sigma_{\text{abs}} &= \frac{\pi}{2k^2} \sum_l (2l+1) [2 - |\alpha(l)+1|^2 - |\beta(l)+1|^2], \\ \sigma_t &\equiv \sigma_{\text{sc}} + \sigma_{\text{abs}} = -\frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \text{Re}[\alpha(l) + \beta(l)],\end{aligned}\quad (5.84)$$

学习过量子力学的同学应当对这些式子似曾相识。事实上，它与量子力学散射问题中分波法的公式完全相同。

我们也可以写出到某个空间立体角的微分散射截面：

$$\frac{d\sigma_{\text{sc}}}{d\Omega} = \frac{\pi}{2k^2} \left| \sum_l \sqrt{2l+1} [\alpha_{\pm}(l) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm i\beta_{\pm}(l) \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{l,\pm 1}] \right|^2, \quad (5.85)$$

其中的上下符号分别对应于入射平面波的偏振： $(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)$ 。这个式子说明，对于圆偏振入射的平面波，它的散射波一般来说是椭圆偏振的。只有对于所有的 l 都有： $\alpha_{\pm}(l) = \beta_{\pm}(l)$ 的特殊情形下，散射波才是圆偏振的。

¶ 上面的讨论虽然写出了散射的截面，但是它们都是表达为若干个参数： $\alpha_{\pm}(l)$ ， $\beta_{\pm}(l)$ 的函数。要真正确定散射截面，我们必须利用 $r = a$ 处的边界条件将散射者外部的场与散射者内部的电磁场匹配起来。这些边条件可以完全确定参数 $\alpha_{\pm}(l)$ ， $\beta_{\pm}(l)$ 并进而确定所有的散射截面。

显然，在边界 $r = a$ 处的边条件依赖于球体内部的电磁场，这又依赖于构成球体的物质的电磁性质。为了简化起见，我们将不去具体地求解球体内部的麦克斯韦方程，而是假定边条件可以用所谓的表面阻抗来描写：

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = Z_s \mathbf{n} \times \mathbf{B} / \mu_0. \quad (5.86)$$

这里的 \mathbf{E}_{tan} 表示电场的切向分量， Z_s 称为该球体的表面阻抗。我们假定所考虑的球体的表面阻抗为常数。虽然看起来十分怪异，但是这个边条件实际上包含了理想导体（ $Z_s = 0$ ）的情形。总之，利用这个边条件我们可以将散射波多极场展开中的系数 $\alpha_{\pm}(l)$ 和 $\beta_{\pm}(l)$ 完全确定：

$$\begin{aligned}\alpha_{\pm}(l) &= 1 - \frac{h_l^{(2)} - i\frac{Z_s}{Z_0} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(xh_l^{(2)})}{h_l^{(1)} - i\frac{Z_s}{Z_0} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(xh_l^{(1)})} \\ \beta_{\pm}(l) &= 1 - \frac{h_l^{(2)} - i\frac{Z_0}{Z_s} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(xh_l^{(2)})}{h_l^{(1)} - i\frac{Z_0}{Z_s} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(xh_l^{(1)})}\end{aligned}\quad (5.87)$$

其中的所有球贝塞尔函数（及其导数）都是在 $x = ka$ 计算的。现在注意到这个公式中一个有意思的结构：如果 $Z_s = 0$ ，或者 $Z_s = \infty$ ，或者 Z_s 是纯虚数，那么发现 $\alpha_{\pm}(l) + 1$ 和 $\beta_{\pm}(l) + 1$ 一定是一个模为 1 的相因子：

$$\alpha_{\pm}(l) = e^{2i\delta_l} - 1, \quad \beta_{\pm}(l) = e^{2i\delta'_l} - 1, \quad (5.88)$$

这里的 δ_l 和 δ'_l 被称为 **散射相移**。具体到理想导体球的散射 ($Z_s = 0$)，我们可以得到导体球的散射相移的明显表达式：

$$\tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \quad \tan \delta'_l = \left[\frac{\frac{d}{dx}(xj_l(x))}{\frac{d}{dx}(xn_l(x))} \right]_{x=ka}. \quad (5.89)$$

如果我们仅仅感兴趣长波极限（即： $ka \ll 1$ ），那么我们可以利用球贝塞尔函数在小宗量时的展开更为具体的散射截面的公式。容易证明，微分散射截面 (5.85) 中最重要的是 $l = 1$ 的项， l 的数值每增加 1，相应的项会比前一项压低一个 $(ka)^2$ 的因子。事实上，利用 $l = 1$ 时 $\mathbf{X}_{1,\pm 1}$ 的明显表达式，我们发现第一项贡献的微分散射截面与我们在第 26.2 小节中得到的公式 (5.75) 完全相同。所不同的是，利用多极场的理论，我们原则上可以得到更高阶的贡献，只要我们有足够的耐心。



相关的阅读

本章是主要讨论的是宏观谐振的电荷和电流密度分布所辐射的电磁波的基本性质。我们仅仅讨论了这种辐射中最低阶的贡献：电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射。另外，正如我们在本章开始所说的，微观粒子的电磁波辐射将放在本课程的第八章中进行讨论。我们对于电磁波散射的讨论是十分简略的。这实际上是一个十分复杂的问题。有兴趣的读者可以参考 [5] 和 [16] 中的详细讨论。我们的讨论忽略了另外一个十分重要的问题：电磁波的干涉和衍射。这方面的理论和应用在光学中有着十分广泛的讨论。对于这方面需要深入了解的同学可以参考经典著作 [15]。

第六章 狭义相对论

本章提要

- 狭义相对论的基本假设 (27)
- 洛伦兹变换 (28)
- 洛伦兹标量与 4-矢量 (29)
- 洛伦兹变换的数学性质 (30)

狭义相对论是爱因斯坦在 1905 年的天才发现。当然，当时许多的实验迹象和理论工作也表明，旧的时空观越来越不适应物理学的一些新的发现。其中最为突出的表现就是旧的时空观与麦克斯韦电磁理论的矛盾。这种矛盾最后集中在一种十分神秘的物质形态——以太——的性质上。对于以太运动的探讨最终导致爱因斯坦创立了狭义相对论。

需要澄清一点的是，狭义相对论是关于**时空观**的理论。原则上讲，它的影响远远超出了经典电动力学的范畴。正是由于这个原因，我们会在各种课程的学习中遇到狭义相对论，例如力学、分析力学、还有以后的量子场论等课程。但是，由于狭义相对论与经典电动力学的密切历史渊源，使得在任何电动力学的课程中**不可能**不包括狭义相对论的内容。这一章中，我们就简要地讨论一下狭义相对论时空观的基本内容。这将为我们下一章发展的相对论电动力学奠定基础。

27 狭义相对论的基本假设及其验证

狭义相对论的基本假设与早期实验

在经典物理中一个重要的概念就是**参照系**。一个参照系就是一个时空的标度，或者说^{•••}是时空的坐标系。一切物理现象的时间和空间都可以在某个参照系中来定量地加以描

述。在狭义相对论中，这些在某个参照系中一定时间和空间点发生的物理现象往往被称为事件。显然，参照系是与其中发生的物理现象无关的。一个物理现象可以在一个参照系中来考察，也完全可以在另一个参照系中来考察。这种不同参照系之间的转换称为参照系之间的变换。在各种不同的参照系中，有一类特殊的参照系，我们称它们为惯性参照系，或者简称为惯性系。要给惯性系一个可操作的定义确实不是一个十分容易的事情。简略地说它们的定义是：如果一个不受外力的经典物体，在该参照系中满足牛顿第一定律，即保持匀速运动，那么我们就称这个参照系为惯性参照系。如果一个参照系是惯性参照系，那么相对于该惯性系做匀速运动的参照系当然也是一个惯性系。

¶ 一个相当古老而又重要的哲学问题就是：不同的惯性系在物理上是等价的吗？也就是说，如果有两个人，他们分别在两个相对匀速运动的惯性系中做实验来确立他们各自的物理定律，他们最后会得到相同的结果吗？具体来说，如果他们两个人都去研究电磁现象，最终他们总结出来的规律都一定是麦克斯韦方程组吗？对于这个问题的回答，一直就有两种不同的观点。一种是认为，有某一个惯性系是特别的，比如中世纪的教廷就持这种观点。这显然是与当时的地心说联系在一起的。他们认为地球是宇宙的中心，与地球固定在一起的参照系（也就是地球在其中静止的参照系）是一个特别的参照系。另一种与之相对的观点则不承认特殊惯性系的存在。这种观点集中地体现在所谓的相对性原理中。相对性原理认为所有的惯性系在物理上都是等价的，在不同惯性系中的物理规律都是相同的。相对性原理正是爱因斯坦狭义相对论的两个重要假设中的一个。正因为如此，爱因斯坦的理论被称为相对论，因为它是建立在相对性原理基础上的。我们再次强调，是否承认相对性原理是不能够从理论上证明的。在人们认识和掌握电磁波之前，这甚至是无法从实验上验证的。因此，我们更愿意称它为一个哲学问题。所以，在物理理论中它必定以原理的形式出现。它究竟是不是正确，只有通过直接或间接的实验来检验。撇开实验检验，如果从个人的角度来讲，我宁愿接受它。设想一下，如果相对性原理不对，那么就会存在无穷多种不同的麦克斯韦方程组，那我的电动力学永远也教不完，同学们也永远学不完了！

¶ 相对性原理并不是爱因斯坦首先提出的，最先提出它的是物理学家伽利略。为了提倡日心说，他提出了伽利略相对性原理。后来，相对性原理又被马赫大大的加以发扬了。伽利略的时空观与爱因斯坦的时空观的重大区别在于狭义相对论的第二条基本假设，这就是光速不变原理。考虑某个惯性参照系中的两个质点，它们位于两个不同的空间点，如果这两个质点之间发生物理的相互作用，一个重要的问题就是，它们之间的相互作用究竟是可以瞬时到达的还是需要一定传播时间才能到达。也就是说，在惯性系中物理的相互作用最大可能的传递速度究竟是无穷大（瞬时相互作用）还是有限大。这种物理相互作用的传播在相对论中又被称为信号的传播。在伽利略时空观中，时间仍然具有某种绝对性。也就是说，不同惯性系之间的时间是共同的。这意味着信号的传播可以是瞬时的，即信号最大可能传递速度是无穷大。爱因斯坦狭义相对论时空观则认为物理相互作用的最

大可能速度是有限的。按照相对性原理，这个最大可能的速度在不同的惯性系中一定是相同的，因为不同惯性系是等价的。爱因斯坦的狭义相对论的第二个基本假设就是：**所有**惯性系中信号最大可能的传播速度是真空中光速 c 。这又被称为 **光速不变原理**。相对性原理加上光速不变原理构成了爱因斯坦狭义相对论的两条基本假设：¹

狭义相对论的基本假设

- 任何惯性系中物理规律相同 (相对性原理)
- 信号最大传播速度是真空中光速 (光速不变原理)

¶ 从纯粹逻辑上讲，即使认为惯性系中信号最大传播速度是有限大，也不能就断言它正好等于真空中的光速，它可以是不小于真空中光速的任何有限的值。爱因斯坦之所以在它的第二条假设中认定信号最大的传播速度就是真空光速主要是受了当时的实验的影响。这类实验中最典型的实验就是著名的 **迈克耳逊—莫雷实验** (Michelson-Morley experiment)。²

迈克耳逊—莫雷实验³的目的是要探测地球相对于绝对 **以太** (ether) 的漂移速度。所谓以太，实际上是在绝对时空观中人们设想出来的、存在于任何地方、并且可以传递相互作用的特殊介质。以太是从古希腊借用过来的词语，笛卡儿首先赋予了它传递相互作用的角色。绝对时空观的人们认为，所谓一个绝对静止的惯性系就是以太在其中静止的惯性系。由于地球一年之中会环绕太阳运行一周，它的平均环绕速度大约是 30km/s ，因此，不管太阳相对于以太是否静止，地球相对于以太的速度在一年之中总会在有的时刻大于 30km/s 。迈克耳逊—莫雷实验就是一个精心设计的实验，它利用光的干涉条纹的移动来试图测量地球相对于一个绝对静止惯性系 (以太) 的速度。这个实验的结果是十分令人震惊的。在实验的精度之内，它没有测到任何地球相对于以太的速度。换句话说，如果以太果真存在，似乎在任何时刻地球在其中都是静止的。

¶ 从电动力学的理论框架来考虑，人们在十九世纪末已经认识到，伽利略时空观与麦

¹这里我们可以顺便提下一段历史公案。有些学者认为狭义相对论的主要贡献者不是爱因斯坦，而是 Poincaré 和洛伦兹。的确，Poincaré 实际上曾经先于爱因斯坦提出了相对性原理 (1899 年) 和光速不变原理 (1904 年)。事实上，在 1904 年美国 St. Louis 的一次报告中，他十分明确地同时提出了这两个原理。当时，荷兰物理学家洛伦兹已经将不同参照系坐标之间的数学变换——我们现在称为洛伦兹变换的东东——得到了 (1903 年)。但是应当指出，他们都没有充分地从整体上来考虑这种新的理论架构。爱因斯坦恰恰做到了这一点 (1905 年)。正是在他的那篇著名的文章中，爱因斯坦从两个基本的原理出发，清晰地阐述了狭义相对论的新时空观，并且逐步获得了多数物理学家的重视和支持。退一步说，假设狭义相对论不归功于爱因斯坦，那么它应当归功于 Poincaré，其次才是洛伦兹、拉摩等等。

²虽然爱因斯坦曾经明确否认迈克耳逊—莫雷实验在创立狭义相对论时的作用，但他也曾经强调过它的重要性。以至于现在这已经成为一个谜。

³两位大虾文章的电子扫描版：<http://www.aip.org/history/gap/PDF/michelson.pdf>。

克斯韦方程是**不相容的**。也就是说，如果在一个惯性系中麦克斯韦方程成立，利用伽利略时空变换到另外一个惯性系，一般来说麦克斯韦方程就不再成立了。⁴这显然是理论上十分令人不爽的结论。爱因斯坦是马赫主义的坚定支持者。麦克耳逊-莫雷实验的否定结果以及其他一些实验的结果，加上麦克斯韦方程与伽利略时空观的矛盾，以及洛伦兹和Poincaré的工作最终促使爱因斯坦相信：必须有一种崭新的时空观来替代伽利略时空观。他发现只要引入相对性原理和光速不变原理就可以对这些实验给出一个十分清晰的解释。同时，麦克斯韦方程也会成为所有惯性系中都普遍成立的基本规律。⁵事实上，我们即将证明，只需要这两个基本原理，加上时空均匀、各向同性的假设，就可以得到所有狭义相对论和相对论电动力学的结果。

¶ 狭义相对论的近代实验验证

麦耳逊-莫雷实验是相对论发展早期十分著名的实验，它启迪了爱因斯坦，最终导致狭义相对论的诞生。狭义相对论自诞生到现在，从来就不缺少挑战者。众多的人物—这中间既包括严肃的物理学家也包括不严肃的业余爱好者—不断试图用理论、实验（多数是理想实验）来推翻狭义相对论。因此，我们有必要在这里介绍一些狭义相对论的比较近代的实验证据。这类证据实际上有很多，例如关于时钟膨胀的实验、关于空间各向同性的实验、关于光速不变的实验等等。我们这里将仅仅涉及运动光源的光速测量实验。按照狭义相对论的第二个基本假设，真空中的光速是不依赖于光源的运动速度的，因此这一点可以看成是对狭义相对论基本假设的直接实验验证。⁶另一方面，这一类实验也是历史上最富有争议性的。

早期的动源光速的测量实验实际上都存在一个**致命的**问题，这就是所谓的**光学灭绝**（optical extinction）问题。简单来说就是，当待测的运动光源（假设在真空中）发光，光总是最终进入我们探测器所在的介质。按照电磁波传播理论中的“**灭绝定理**”（又称为 Ewald-Oseen 灭绝定理），⁷当电磁波进入介质时，介质会被极化并且会诱导产生新的电磁场。新的电磁场中的一部分正好与原先真空中入射的电磁波完全相消（将其灭绝！），另一部分则对应于按照所在介质中相速度传播的电磁波。换句话说，在介质中的探测器所探测到的电磁波（光）实际上并不直接来源于运动的光源，而是

⁴这一点是洛伦兹首先意识到的（1899年）。

⁵与爱因斯坦的狭义相对论不同，Ritz 理论（Ritz's theory）选择了保留传统的伽利略-牛顿时空观但是更改麦克斯韦方程中两个有源的方程。Ritz 理论是所谓**发射理论**（emission theory）中最为流行的一种。

⁶狭义相对论的基本假设有两点，相对性原理和光速不变。如果我们仅仅坚持第一条，而不假设第二条，或者将第二条改为满足传统的伽利略-牛顿的速度相加原则，我们就得到所谓的**发射理论**（emission theory）。因此，对于动源光速的测量可以看成是对狭义相对论和发射理论孰对孰错的判定。

⁷这个翻译比较怪。也许应当翻译成淬灭定理，或者破灭定理。光学中可能翻译为**消光定理**。需要指出的是，定理本身以及它的提出者们都与峨嵋派没有任何关系。

来源于介质表面所感生的电磁波。由于探测器本身相对于介质是静止的，因此实际上探测器所测到的是静止的（而不是运动的！）介质中的光速。当然，这种灭绝机制不是在介质表面瞬时完成的，而是需要持续一段距离，这段距离称为介质的 **灭绝距离**。依赖于介质的性质和光源所发出电磁波的能量，这个灭绝距离可以很大，也可以很小。只要探测器距离介质表面（灭绝机制起作用的区域）的距离大于灭绝距离，那么它探测到的实际上只是静止的介质表面按照灭绝机制所感生出来的电磁波，该电磁波仅仅依赖于静止的介质的性质而与光源运动与否完全无关。我们以为测到了运动光源发出的电磁波，而实际上我们仅仅接受到了探测器所在的介质所发射的电磁波。这就是 J.G. Fox 对于早期动源光速测量实验的批评。⁸

考虑到上述光学灭绝的因素，1964 年，T. Alvager 等人在 CERN 进行了一项著名的实验，⁹ 他们利用飞行时间（Time of Flight, TOF）方法测量了接近光速（大约为 $0.99975c$ ）的 π^0 介子衰变时所辐射的光子的速度。如果我们假定辐射的光子的光速可以写为： $c' = c + kv$ ，其中 v 是源的速度（也就是 π^0 的速度），那么实验的结果是： $k = (0 \pm 1.3) \times 10^{-4}$ 。这个实验中光学灭绝的效应不重要，因为简单的估计给出其灭绝距离至少是几百米而测量的位置远小于灭绝距离。另一个更为近代的实验是利用自由电子激光装置 FLASH。这套在高真空中的装置利用自由电子激光器给出的限制是： $k \lesssim 10^{-7}$ 。除了上述地面实验之外，一些从遥远星体（例如脉冲双星）的辐射也可以对 k 的数值给出比较严格的限制。我们看到，这些近代更为精确的实验不仅没有证伪狭义相对论，而且使得狭义相对论变得更加令人信服了。

¶ 最后顺便提一下，历史上也存在“号称”与狭义相对论矛盾的实验结果。其中一个比较典型的例子是著名的 Miller 实验（与迈克耳逊—莫雷实验十分类似的实验）。D.C. Miller 在进行了多年（1925 — 1929）的精心实验后在 1933 年发表了实验结果。¹⁰ 他声称测出了非零的地球相对于以太的漂移速度。这当然与狭义相对论是不相符的。Miller 得到这样的结果的主要原因是他没有对他的实验数据进行科学的误差分析。这个程序虽然在今天的物理学实验中是常规的，但是在 Miller 那个年代还没有被普遍采用。利用 Miller 80 年前采集的大量原始数据，最近，T.J. Roberts 对其进行了系统的误差分析。他得到的结论是：在误差范围之内，Miller 的原始数据与地球漂移速度的零结果其实是兼容的。¹¹ 因此，我们可以自信而且自豪地说：至少到目前为止，我们还没有发现任何可信的推翻狭义相对论的实验证据。

⁸J.G. Fox, *Am. J. Phys.* **30**, 297 (1962); *Am. J. Phys.* **33**, 1 (1965); *J. Opt. Soc.* **57**, 967 (1967).

⁹T. Alvager, J.M. Bailey, F.J.M. Farley, J. Kjellman and I. Wallin, *Phys.Lett.* **12**, 260 (1964); *Arkiv.f. Fys.* **31**, 145 (1965).

¹⁰D.C. Miller, “The Ether-Drift Experiment and the Determination of the Absolute Motion of the Earth”, *Rev. Mod. Phys.* **5**, p203-242 (1933).

¹¹参见: arXiv:physics/0608238.

28 洛伦兹变换

¶ 现在我们试图来建立符合第 27 节中爱因斯坦的两个基本假设的时空变换规则。由于时空的均匀性，我们期待不同惯性系之间的变换是一个线性变换。考虑在某个惯性参照系 K 中的两个时空点：(t₁, **x**₁) 和 (t₂, **x**₂)。假设在第一个时空点 (t₁, **x**₁) 发射了一个光信号，在第二个时空点 (t₂, **x**₂) 被接收到。这时，我们称这两个事件——也就是第一个时空点发射和第二个时空点接收的两个事件——是由光信号联系的。如果我们构造两个时空点之间的不变间隔 Δs^2 ：

$$\Delta s^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = 0 . \quad (6.1)$$

上面这个公式的第一个等号是任意两个事件的不变间隔的定义，而对于两个光信号联系的事件其不变间隔一定等于零。

现在考虑另外一个惯性系 K' ，它相对于第一个惯性系以速度 \mathbf{v}' 匀速运动。如果在惯性系 K' 中来考察同样这两个事件。它们发生的时空点就变为 (t'₁, **x**'₁) 和 (t'₂, **x**'₂)。两个事件的不变间隔变为 $\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta \mathbf{x}'^2$ 。按照光速不变原理，这个不变间隔一定也为零。于是我们看到，在两个惯性系之间变换时，它们中的不变间隔一定有：

$$\Delta s^2 = A(|\mathbf{v}'|)\Delta s'^2 . \quad (6.2)$$

其中系数 $A(|\mathbf{v}'|)$ 只可能与两个惯性系之间的相对速度的大小有关，而与时空坐标无关。这一点是时空均匀性和各向同性的要求。

但是，如果惯性系 K' 相对于惯性系 K 以速度 \mathbf{v}' 运动，那么对于惯性系 K' 中的观察者来说，惯性系 K 就以速度 $-\mathbf{v}'$ 相对于惯性系 K' 运动。所以我们又有：

$$\Delta s'^2 = A(|-\mathbf{v}'|)\Delta s^2 = A(|\mathbf{v}'|)\Delta s^2 .$$

与上面的式子结合我们发现：上面的两个式子要成立，唯一的可能是函数 $A(|\mathbf{v}'|)$ 是一个纯粹常数，而且按照上面的式子它满足： $A^2 = 1$ 。连续性要求： $A = 1$ 。于是我们得到一个重要结论，不同惯性系坐标变换时，任意两个事件之间，或者说四维时空中任意两个时空点之间的不变间隔不变：

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 . \quad (6.3)$$

与三维欧几里德空间中的转动不改变一个三维空间任意两个点之间的距离相类似，在我们考虑的不同惯性系之间的四维时空变换下，如果我们也称之为转动的话，这种“转动”不改变四维时空中两个点之间的不变间隔（这就是为什么它被称为不变间隔）。这个四维时空被称为闵可夫斯基时空，简称闵氏时空，或闵氏空间。¹² 这个空间与三维欧几里

¹²将三维的空间与时间一起来构成一个四维流形的概念首先是闵可夫斯基（Hermann Minkowski）在 1908 年的一篇文章中提出的。在这篇文章中他并没有用逆变和协变矢量和度规的方式，而是引入了纯虚的时间坐标。

德空间的区别是空间中两个点之间的“距离”，也就是前面定义的不变间隔，并不一定总是实数。具体地说，如果两点之间不变间隔的平方是正数，这时我们称两个时空点的间隔是类时的；如果两点之间不变间隔的平方是负数，这时我们称两个时空点的间隔是类空的；如果两点之间不变间隔的平方是零，这时我们称两个时空点的间隔是类光的。

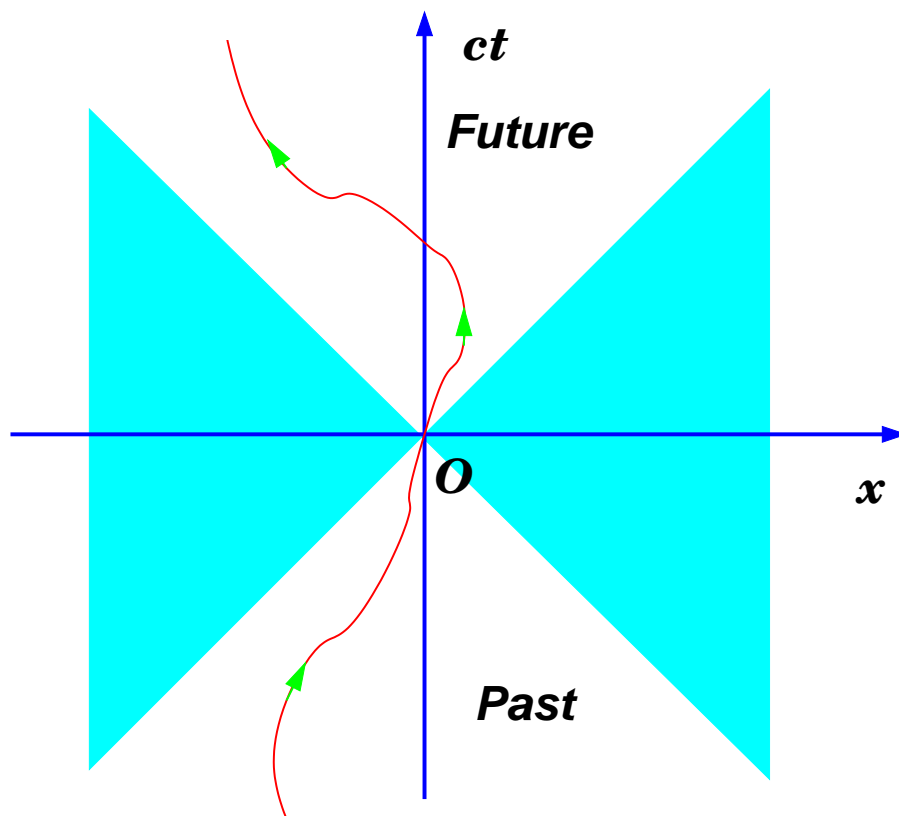


图 6.1: 闵氏时空中的光锥，光锥的分界面由所有与原点的不变间隔为类光的点构成。一个粒子在 $t = 0$ 时处于原点。它的时空轨迹称为世界线，它一定穿过原点并且完全位于类时的区域内。

闵氏时空中的任意一点可以按照它与原点之间的不变间隔分为类空、类时和类光的三种可能。所有类光的点在四维闵氏时空中构成了所谓的光锥。光锥自然地将四维时空分为类时和类空的两类区域（参见图 6.1）。在图 6.1 中浅蓝色的区域代表类空的区域白色的区域则代表类时的区域，两者的交界面就是光锥。我们假设一个粒子在时间 $t = 0$ 时位于坐标原点。那么这个粒子的演化轨迹在四维时空中就描述出一条曲线，它称为这个粒子的世界线。如果这个粒子是光子，那么它在 $t > 0$ 的轨迹就正好位于光锥面上。如果这个粒子是一个速度小于光速的粒子，那么它的世界线一定穿过原点并且位于 $t > 0$ 的类时区域内。这个区域可以称为这个粒子的“未来”。类似的，在 $t < 0$ 的时刻，粒子一定也来自于类时区域，这个区域被称为这个粒子的“过去”。任何粒子的世界线不会落入类

空的区域，因为粒子运动的速度不可能大于光速。

¶ 在不同惯性系之间维持其不变间隔不变的线性坐标变换被统一称为洛伦兹变换。它可以看成闵氏空间中的一个“转动”。一个普遍的“转动”总可以看成是六种相互独立的转动的合成。这六种独立的转动分别对应于： xy , xz , yz , xt , yt 和 zt 平面内的转动。前三种转动只是涉及空间坐标之间的变换，它就是纯粹的三维空间的转动；后三种涉及到一个空间坐标与一个时间坐标之间的变换。由于它们的对称性，我们首先来考察一下在 xt 平面内的转动。为此，我们考虑一个惯性系 K 以及另一个以匀速 v 相对于 K 沿正 x 方向运动的惯性系 K' 。在 $t = 0$ 时刻两个惯性系的时空原点重合。这时，任意一个时空点 (t, x, y, z) 与原点之间的不变间隔的平方可以写成：

$$s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (6.4)$$

由于我们仅仅考虑 xt 平面的转动，因此能够保持上式不变的一般转动可以写成：

$$\begin{aligned} x &= x \cosh \psi + ct \sinh \psi \\ ct &= x \sinh \psi + ct \cosh \psi, \end{aligned} \quad (6.5)$$

而 $y' = y$, $z' = z$ 。上式中的双曲函数的角度 ψ 只与两个惯性系之间的相对速度 v 有关。在 K 系中考察 K' 系的坐标原点的运动我们立刻得知： $\tanh \psi = v/c$ ，于是我们最后得到：

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (6.6)$$

这就是大家熟知的与一个方向（具体地说，这里是 x 方向）的 boost 相对应的洛伦兹变换（1904 年）。¹³ 其中我们使用了相对论中通用的记号： $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 和 $\beta = v/c$ 。

¶ 如果惯性系 K' 相对于惯性系 K 的速度是任意的，那么公式 (6.6) 的推广是显而易见的。具体地说，如果惯性系 K' 相对于惯性系 K 的速度为 \mathbf{v} ，那么空间坐标中与 \mathbf{v} 垂直的分量应当在变换下不变而平行的分量应当与时间相互混合。具体的公式是：

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct. \quad (6.7)$$

¶ 由于时间与空间的混合，狭义相对论中的洛伦兹变换会带来与我们日常经验相悖的一些结论，比如：长度收缩，或者称为洛伦兹收缩、¹⁴ 时钟变慢（又称为时间膨胀）等等。¹⁵ 狭义相对论时空的这些性质同学们在普通物理中都有过比较详细的介绍，我们这里只想指出，所有这些看似矛盾的结论往往是狭义相对论中同时的相对性造成的。洛

¹³其实早两年，洛伦兹得到了一个近似的洛伦兹变换，它只包含准确到 (v/c) 的量。

¹⁴或者应当称为洛伦兹-菲兹杰罗收缩（Lorentz-FitzGerald contraction）。

¹⁵首先注意到这一点的应当是拉摩（Larmor, 1900 年）。

洛伦兹变换 (6.6) 告诉我们在一个惯性系中同时、同地发生的两个事件，在任何惯性系中仍然保持同时、同地发生。但是，在一个惯性系中同时但不同地发生的两个事件，在另外一个惯性系中考察将是不同时间也 不同地点发生的。另外，所谓尺缩或钟慢效应完全是一种运动学的测量效应，构成尺子或钟表的物质本身并没有发生任何物理上的变化。

最后，让我们简要说明一下因果性的概念。所谓因果性是指事件发生的时间顺序，在前面发生的事件有可能成为后面发生事件的原因，而反过来则是不可能的。狭义相对论是严格遵循因果性的理论。而且，它对于因果性的要求比伽利略时空观中的要求还要更为“苛刻”一些。具体地说，如果两个事件发生在不同地点，在伽利略时空观中，前面发生的事件完全可能成为后发生事件的原因，因为伽利略时空中相互作用可以以无穷大的速度传播；但是在狭义相对论中，由于存在最大可能的信号传播速度 c ，一个前面发生的事件，它可能成为另一个事件的原因还必须满足： $c^2\Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 > 0$ ，也就是说，这两个事件的不变间隔必须是类时的，才可能有因果联系。如果用光锥图 6.1 来看，一个在 $t = 0$ 发生在原点的事件只可能成为它的“未来”的类时区域中的事件的原因。由于不变间隔在洛伦兹变换下是不变的，因此，一个参照系中两个事件之间的因果关系不会因为转换参照系而发生变化。

29 洛伦兹标量与 4-矢量

这一节我们讨论闵氏空间中最为基本的两种物理量：洛伦兹标量和洛伦兹 4-矢量。在任意洛伦兹变换下都不变的量被称为洛伦兹标量。我们前一节已经看到，闵氏空间中任意两点（或者说两个事件）之间的不变间隔的平方： Δs^2 就是一个洛伦兹标量。另外一个非常重要的洛伦兹标量是闵氏空间中的四维体积元： d^4x ：

$$d^4x' = d^4x . \quad (6.8)$$

这一点是由于洛伦兹变换的线性矩阵的行列式是 1。除了在洛伦兹变换下不变的标量以外，另外一种具有简单变换性质的物理量就是洛伦兹 4-矢量。与通常的三维欧几里德空间不同，我们在闵氏空间中将区别两种不同的洛伦兹 4-矢量，它们的变换性质稍有不同。¹⁶

我们可以将闵氏空间中的时空坐标这样的物理量用一个 4-维空间的矢量来标记。具体地说，我们令：

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z . \quad (6.9)$$

¹⁶从原则上讲，在狭义相对论中也可以在所有 4-矢量的零（时间）分量中引入纯虚数单位 i 。这样一来可以不必区分协变 4-矢量和逆变 4-矢量，也可以不必引入度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 。不过，虽然对于狭义相对论来说这也许比较方便，但对于广义相对论来说，引入度规是不可避免的。所以我们采用了引入度规和两种 4-矢量的讲述方法。

我们将使用 x^μ 其中 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 来统一标记 (x^0, x^1, x^2, x^3) 。我们称之为 **逆变 4-矢量**，在不致引起混淆的情形下我们也称之为 **逆变矢量**。用它的时间分量与空间分量表达，一个逆变 4-矢量可以写成：

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) . \tag{6.10}$$

需要注意的是，标志一个逆变 4-矢量分量的指标出现在它符号的 **右上角**。与逆变 4-矢量相对应，我们称

$$x_\mu = (x^0, -\mathbf{x}) . \tag{6.11}$$

为一 **协变 4-矢量**。一个协变 4-矢量的分量指标出现在其符号的 **右下角**。它和相应的逆变 4-矢量的时间分量相同，空间分量则相差一个负号。

从形式上讲，一个协变 4-矢量与其相应的逆变 4-矢量可以通过 **升高** 或 **降低** 其指标得到：¹⁷

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu . \tag{6.12}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 称为闵氏空间的 **度规张量**，而 $\eta^{\mu\nu}$ 为度规张量的逆，也就是说它们满足：

$$\eta_{\mu\beta} \eta^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu , \tag{6.13}$$

其中 δ_μ^ν 为 Kronecher 符号，它在两个指标相同时为 1；不同时恒为零。在狭义相对论的闵氏时空中，度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 和它的逆 $\eta^{\mu\nu}$ 的每一个分量其实都相等，也就是说 $\eta_{\mu\nu}$ 自己就是自己的逆。它们的表达式为：¹⁸

$$\eta_{00} = \eta^{00} = 1, \eta_{ii} = \eta^{ii} = -1, i = 1, 2, 3. \tag{6.14}$$

$\eta_{\mu\nu}$ 的其余分量（非对角分量）皆为零。在公式 (6.12) 中，我们将度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 中的一个协变指标与逆变 4-矢量 x^ν 的逆变指标取为相同并且求和（爱因斯坦求和规则），这样的操作被称为指标的 **缩并**。在引入了协变矢量和逆变矢量后我们约定：

指标缩并的约定

☞ 所有指标缩并一定在一个协变指标（下标）和一个逆变指标（上标）间进行

¹⁷这里我们运用爱因斯坦求和规则，即对于重复的指标求和。
¹⁸闵氏时空中的度规的定义并不统一。基本上分为两大类：一类是我们这里采用的定义；另一类则正好与我们的相差一个负号。曾几何时，我们这里度规的定义又被称为“西岸度规”（west coast metric）而另一类被称为“东岸度规”（east coast metric）。当然这种称谓不可太认真。

利用度规张量、逆变 4-矢量 dx^μ 以及相应的协变 4-矢量 dx_μ ，闵氏空间中的两个无限接近的点之间的不变间隔平方 ds^2 可以写成下列等价形式中的任何一种：

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu . \quad (6.15)$$

显然，它在任意的洛伦兹变换下是不变的。

¶ 我们知道坐标逆变 4-矢量 x^μ 在不同参照系之间是按照洛伦兹变换来变化的。我们可以将一个一般的洛伦兹变换写成：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu , \quad (6.16)$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是洛伦兹变换的矩阵。我们前面得到的洛伦兹变换公式 (6.6) 和公式 (6.7) 只是普遍的洛伦兹变换的特殊形式。读者不难具体写出这时 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的各个分量。

如果在任意的洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 下，物理量 A^μ 按照与四维坐标 x^μ 相同的形式变换，即：

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu , \quad (6.17)$$

那么物理量 A^μ 就被称为是一个逆变 4-矢量。利用度规张量降低指标，我们可以得到其相应的协变 4-矢量 A_μ 。将任何一个协变 4-矢量 A_μ 与任意一个逆变 4-矢量 B^μ 相乘并且缩并它们的指标，我们就得到一个洛伦兹标量，它被称为两个 4-矢量的 **内积**：

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu . \quad (6.18)$$

我们前面提到的不变间隔的平方 (6.15) 就是坐标间隔 4-矢量 dx 与它自己的内积。事实上，任意两个矢量的内积都是洛伦兹变换下的不变量。如果用逆变指标和协变指标的语言来说，只要我们将一个逆变指标和一个协变指标缩并，假定我们的物理量中再没有其他指标，我们就得到一个洛伦兹标量。

¶ 另一个在电动力学中重要的 4-矢量是电磁波的波矢 4-矢量。我们首先注意到一个电磁波的相位： $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ 在不同参照系下是不变的，即它是一个洛伦兹标量。于是我们得到结论：

$$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k}) , \quad (6.19)$$

一定构成一个逆变 4-矢量。我们称之为电磁波的 **4-波矢**。前面提到的不变相位就是电磁波的 4-波矢与时空位置 4-矢量的内积： $\phi = k \cdot x = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k^\mu x_\mu$ 。

电磁波的频率与波矢构成 4-矢量意味着它们在洛伦兹变换下按照与时空坐标类似的方式变换。所以，电磁波的频率在坐标变换下会发生变化，这个现象就是光的 **多普勒效应**。¹⁹ 利用光的性质： $|\mathbf{k}| = k^0 = \omega/c$ ，再结合洛伦兹变换，我们马上发现频

¹⁹利用狭义相对论的理论框架来讨论多普勒效应归功于爱因斯坦。

率的变换行为是:

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos\theta), \quad (6.20)$$

其中 θ 是 \mathbf{k} 与 η 的夹角。举例来说, 如果 \mathbf{k} 与 η 平行, 那么我们就得到相对论(纵向)多普勒效应的公式:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

如果 \mathbf{k} 与 η 垂直, 我们就得到所谓横向多普勒效应:

$$\omega' = \gamma\omega.$$

需要指出的是, 横向多普勒效应是一个纯粹的相对论效应, 它没有非相对论的对应。

¶ 考虑一个闵氏空间中的标量函数(标量场) $f(x)$, 我们可以定义一个四维梯度算符: ∂_μ , 它作用于标量函数的规则是:

$$\partial_\mu f(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}. \quad (6.21)$$

利用偏微商的锁链法则不难证明, 这个算符作用于一个标量场以后产生一个协变 4-矢量, 这就是为什么我们将四维梯度算符的脚标写在算符的右下角。当然, 利用度规张量 $\eta^{\mu\nu}$ 我们也可以得到具有一个上标的四维梯度算符:

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (6.22)$$

将具有协变指标和具有逆变指标的两个四维梯度缩并, 我们就得到一个标量算符, 它就是我们前面遇到的达朗伯算符(差一个负号):

$$-\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (6.23)$$

¶ 利用多个 4-矢量指标我们可以构造闵氏空间中具有任意指标(协变指标或逆变指标)的 **四维张量**。在不至于混淆的情形下我们就简称为张量。在洛伦兹变换下, 一个张量的每一个指标都分别按照协变或逆变指标来变换。一个张量中指标的个数称为这个张量的阶。所以标量就是零阶张量, 4-矢量就是一阶张量等等。²⁰

¶ 最后我们指出, 各阶张量—包括标量、矢量、二阶张量、更高阶张量等—是 **唯一的** 在洛伦兹变换下具有 **确定变换性质** 的数学对象。因此, 一个物理理论, 如果它要符合狭义相对论的要求, 那么表述它的数学方程一定是用(正确的)张量形式写出的。

²⁰有关 4-矢量和闵氏空间张量的数学定义和性质, 读者还可以参考本讲义后面的附录 A。

²¹只有这样这个方程所描述的物理规律才可能是在不同参照系中普遍成立的，²²而这一点恰恰是相对性原理的要求。如果一个方程满足上述条件，我们就称这个方程在洛伦兹变换下是协变的。如果一个物理理论中的所有方程都是协变的，我们就称这个物理理论是协变的，或者说它具有协变性。狭义相对论要求，所有的物理规律一定都是协变的。我们在下一章中将着重论述，电磁理论（也就是麦克斯韦方程组）是一个协变的理论。

30 洛伦兹变换的数学性质

¶ 前面我们提到，一个一般的洛伦兹变换可以分解为六种不同转动的合成。现在我们就来稍微仔细地研究洛伦兹变换的一些数学性质。

一个极为特殊的洛伦兹变换就是根本不变。这时的时空变换称为单位变换，它的矩阵表示可以写成：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu, \tag{6.24}$$

我们已经知道，一个普遍的洛伦兹变换的唯一要求就是它不改变任意两个 4-矢量的内积。利用洛伦兹变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$ ，这个条件可以写成：

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} . \tag{6.25}$$

如果用矩阵形式写出并且两边去行列式，我们发现变换矩阵 Λ 的行列式为 ± 1 。因此，这些变换分为不相联通的两支，其变换矩阵的行列式分别等于 +1 和 -1。行列式等于 +1 的一支与单位变换是连续联通的。

¶ 所有的洛伦兹变换（包括单位变换）的集合在数学上构成一个称为群的结构。我们称之为洛伦兹群。每一个洛伦兹变换是洛伦兹群中的一个元素。由于洛伦兹变换的数目可以有（连续不可数的）无穷多，所以洛伦兹群中的元素个数也有无穷多，这样的群称为无限群。每一个洛伦兹变换实际上可以用六个实数参数来刻画，它们可以理解为闵氏空间中六对独立的平面中的“转动”角度。洛伦兹群的每个群元素解析地依赖于这六个参数，这样的群被称为李群。它的一般普遍的变换矩阵可以写成：

$$\Lambda = \exp(-i\theta_i \mathbf{S}_i - \omega_i \mathbf{K}_i) , \tag{6.26}$$

²¹这里所说的正确是指方程中的各个项的指标应当均衡，例如：缩并的指标一定是协变、逆变成对出现；相加的两项必须具有相同的协变和逆变指标数目等等。

²²请注意，这只是个必要条件。满足了协变性这个必要条件之后，一个方程要成立也许还需要满足其他的物理条件。但是如果协变性的条件得不到满足，这个方程不可能是正确的。

其中 θ_i 和 ω_i 是相应的六个转动角度 (其中 $i = 1, 2, 3$)；六个矩阵： \mathbf{S} 和 \mathbf{K} 被称为相应的生成元。其中三个 \mathbf{S} 生成了三维空间的普通转动，另外三个 \mathbf{K} 则生成了沿三个不同空间坐标轴的 boost。这些矩阵元的具体矩阵形式可以表达为：

$$\left\{ \begin{array}{l} i\mathbf{S}_{1,2,3} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ i\mathbf{K}_{1,2,3} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{array} \right. \quad (6.27)$$

洛伦兹群的这六个生成元之间满足下列基本对易关系：

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k, \quad [\mathbf{S}_i, \mathbf{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{K}_k, \quad [\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k, \quad (6.28)$$

从数学上讲，上述生成元之间的对易关系就已经完全刻划了单位元素附近的洛伦兹群（这称为相应李群的李代数）的性质。我们这个课程中，我们将不再继续深入讨论洛伦兹群的数学性质。这些性质将会在以后的其他课程中，例如李群、李代数、量子场论等课程中继续研究。

¶ 如果一个洛伦兹变换仅仅涉及到 boost，那么它的变换矩阵是可以直接写出来的。对照公式 (6.7) 我们不难写出这时 Λ^μ_ν 的矩阵表达式：

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

其中 β_i 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的三个分量。相应的时空坐标变换可以由： $x' = \Lambda(\boldsymbol{\beta})x$ 得到，这里 x 和 x' 分别代表两个参照系中的逆变时空坐标 4-矢量。



相关的阅读



本章是主要处理的是狭义相对论时空观的基本问题。对于狭义相对论的基本假设的实验验证方面，我们并没有过多地展开讨论。有兴趣的同学可以在网上查到十分丰富的内容 (google 之，如果它还没有退出中国的话!)。唯一需要提醒的是：网上关于相对论的信息

良莠不齐，大家需要小心了。对于基本的相对论效应（例如长度收缩、时钟变慢、多普勒效应等等）我们没有太细致地讨论。如果同学们感到需要，可以参考普通物理力学中的一些讨论。我们这里着重介绍了四矢量的概念，这个概念对以后的课程将是十分重要的。



第七章 相对论性电动力学

本章提要

- 自由粒子的拉氏量与运动方程 (31)
- 外电磁场中粒子的拉氏量 (32)
- 运动方程与规范不变性 (33)
- 电磁场的作用量与电动力学的协变性 (34)

前

一章我们主要讨论了狭义相对论的时空观以及这种新的时空观所带来的空间几何学。到目前为止，我们还完全没有涉及到这个时空中的动力学问题。这一章中，我们将详细论述相对论粒子动力学和相对论电动力学的内容。我们所研究的对象包括带电粒子，它们是产生电磁场的源，同时它们也与电磁场有相互作用；另外我们的研究对象还包括电磁场本身。正如前面已经多次提到的，我们将证明：粒子的动力学以及场的动力学——也就是麦克斯韦方程——是与狭义相对论时空观完全兼容的。

将非相对论粒子的动力学推广到相对论，以及论述麦克斯韦方程的协变性一般有两种讲述方法。一种是从三维情形下的粒子动力学方程（也就是牛顿方程）和电磁场的麦克斯韦方程（三维形式的）出发，然后设法将其推广到四维协变形式的方程。另外一种讲述方法是从狭义相对论的基本要求出发，直接写出协变形式的粒子运动方程和场方程，然后说明这些协变形式的方程在转化为三维形式后正好回到粒子的牛顿方程以及三维形式的麦克斯韦方程。本章中，我们将试图用第二种方法来讨论。因为这样更能够充分揭示相对论性电动力学的内在逻辑联系。我们的讨论将是比较简略的。有些推导的中间步骤并没有完全给出，有兴趣的同学可以自己来补充。其实更为重要的是本章中所得到的结论，而不是那些中间步骤。

31 自由粒子的拉氏量与运动方程

¶ 我们将采用分析力学（拉格朗日力学）的语言来建立狭义相对论中粒子的运动方程。¹首先考虑一个自由的粒子，我们试图来建立它的 **作用量**。一个粒子的作用量是它的 **拉格朗日量** 对于时间的积分。粒子的运动方程由 **最小作用量原理** 得出。结合狭义相对论，一个非常重要的事实就是：力学系统的作用量应当是一个洛伦兹不变量（洛伦兹标量）。²对于一个闵氏空间中的自由粒子，**唯一** 能够写出的不变量就是：

$$S = \int L dt = -mc \int ds, \quad (7.1)$$

其中 $ds = cd\tau$ 是该粒子运动的不变间隔，即： $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，这里的 $d\tau$ 称为粒子的 **固有时间** 间隔。它实际上就是在相对于粒子静止的参照系中的时间间隔。这个作用量有一个十分重要的性质，它对于粒子的 **世界线** 的重新参数化是不变的。我们知道粒子的世界线可以描述为一组参数方程：

$$x^\mu = x^\mu(\tau), \quad (7.2)$$

其中 τ 为描写粒子世界线的一个参数（例如粒子的固有时）。于是上面的自由粒子作用量可以写为：

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)}. \quad (7.3)$$

粒子的世界线可以用粒子的固有时描写，也可以用其他的参数来描述。例如，我们可以引入另一个参数 $\tilde{\tau}(\tau)$ ，来重新参数化粒子的世界线：

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu[\tau(\tilde{\tau})], \quad \tau = \tau(\tilde{\tau}), \quad (7.4)$$

这个变换称为粒子世界线的 **重参数化变换**。在重参数化变换下，我们发现上面的自由粒子的作用量 (7.3) 是不变的，即它也可以写为：

$$S = -mc \int d\tilde{\tau} \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}\right) \left(\frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}}\right)}. \quad (7.5)$$

¹如果你没有修炼过分析力学，我只能说，你杯具了。只好请你读一下本讲义的附录 B。不过说实话，如果真的一点儿都没接触过，看了也很难改变你杯具的命运，只不过容量小了一些而已。

²这应当是一个比较自然的假设。这样一来，最小作用量原理的叙述就不依赖于参照系的选取，符合相对性原理的要求。

因此描写粒子世界线的参数 τ 可以是粒子的固有时，也可以是固有时的任意单调增函数，而自由粒子的作用量 (7.3) 在其世界线的重新参数化变换 (7.4) 下不变。这就是所谓的 **重参数化不变性** (reparametrization invariance)。

下面我们写出自由粒子的拉格朗日量和运动方程。利用：

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2} = c dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} ,$$

其中我们用到了粒子的三维速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ ，于是我们得到一个自由粒子的拉格朗日量：

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} . \tag{7.6}$$

到目前为止我们还没有提到物理量 m 的涵义。唯一的要求是它是一个洛伦兹标量。它完全是粒子的 **内秉性质**，我们称它为粒子的（静止）**质量**。可以验证：这个定义与我们在牛顿力学中的定义是一致的。因为如果取所谓的 **非相对论极限**： $\mathbf{v}^2/c^2 \ll 1$ ，我们可以将拉格朗日量的表达式中的根号展开，从而得到非相对论近似下一个自由粒子的拉格朗日量正好是 $m\mathbf{v}^2/2$ （除去一个无关的常数以外）。因此质量参数 m 一定是一个非负的洛伦兹标量，³ 它体现了一个粒子的惯性的大小。

一旦有了粒子的拉格朗日量，就可以得到相应的 **正则动量**：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} . \tag{7.7}$$

于是粒子的（三维形式的）运动方程就是： $d\mathbf{p}/dt = 0$ ，即该粒子的速度（动量）是常矢量。粒子的能量（哈密顿量）也可以从拉格朗日量得到：

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} . \tag{7.8}$$

这就是一个相对论性粒子的能量。

粒子的动量、能量和运动方程也可以纯粹用四维协变的形式写出。为此，我们从自由粒子的作用量 (7.1) 出发直接变分：

$$\delta S = -mc \int \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} .$$

我们可以定义一个协变 4-矢量 u_μ ：

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} . \tag{7.9}$$

³这样才能使得系统真实的运动轨道成为作用量的极小值而不是极大值。

它称为粒子的 **四维速度**，或简称 4-速度。⁴ 于是我们可以将作用量的变分写成：

$$\delta S = -m c u_{\mu} \delta x^{\mu} + m c \int \frac{d u_{\mu}}{d s} \delta x^{\mu} , \quad (7.10)$$

于是，对于端点固定的世界线，我们得到自由粒子运动的方程：

$$\frac{d u_{\mu}}{d s} = 0 . \quad (7.11)$$

它的解仍然是粒子以常速度运动。与此同时，我们还得到了与 x^{μ} **共轭** 的粒子 4-动量： p_{μ} ，它的表达式为：

$$p^{\mu} = m c u^{\mu} = (E/c, \mathbf{p}) . \quad (7.12)$$

即 4-动量的时间分量是粒子的（相对论性）能量，它的空间分量是粒子的（相对论性）动量。换句话说，在狭义相对论中，粒子的能量和动量一起构成了一个 4-矢量，就像时间与三维坐标构成了坐标 4-矢量一样。⁵ 由于是 4-矢量，因此在参照系的洛伦兹变换下，4-动量的变换规则就和坐标 4-矢量的变换规则完全一样：

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu} . \quad (7.13)$$

我们看到，在相对论中即使是静止的质点也具有 **静止能量** $E = m c^2$ 。这个著名的关系被称为爱因斯坦 **质能关系**，它使得爱因斯坦得以享誉全球，它也被认为是现代物理学中一个标志性的公式（地球人都知道）。⁶

¶ 最后我们指出，在一个均匀时空（也就是具有时间和空间平移不变性的时空）进行的物理过程中，力学系统的 4-动量一定守恒；也就是说，系统的（相对论性）能量和（相对论性）三动量的各个分量分别守恒。这就是相对论性的能量—动量守恒定律。这个守恒律被大量地运用在粒子的散射过程中。⁷

例题 7.1 零质量的粒子 前面给出的相对论性自由粒子的作用量 (7.1) 不能适用于零静止质量的粒子。我们这里就来讨论这个问题。

⁴需要注意的是，按照这个定义的 4-速度并不具有速度的量纲。它是无量纲的。有的书上将 $dx_{\mu}/d\tau$ 定义为 4-速度，其中 $cd\tau = ds$ ，这样就具有速度量纲了。

⁵一个质点的相对论性能量、动量以及运动方程是普朗克（Planck）在 1906 年首先提出的。

⁶在狭义相对论的动力学建立之前，就已经有一些物理学家猜测能量与质量之间的关联了。早在 1881 年，汤姆孙（就是发现电子的那个大侠 J. J. Thomson。）就认为： $E = (3/4)mc^2$ （原因参见第 42.2 小节）；在 1900 年，Poincaré 更从玻印廷矢量与电磁场动量密度之间的关系（参见第一章中的公式 (1.53)）出发，提出了 $E = mc^2$ 的猜测。

⁷请同学们特别、特别、特别注意我这一段话。许多的课后作业以及期末考试题目很可能都是这一类哦。

解： 为了能够处理零质量的情形，我们来介绍另一种自由粒子作用量的表述方法。我们引入一个辅助的世界线正定标量函数 $e(\tau)$ ，我们称之为世界线的**单元基** (einbein)，
 8 并且考虑如下的作用量：

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{e(\tau)} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + e(\tau) m^2 c^2 \right). \quad (7.14)$$

注意这个作用量里面除了包含粒子运动的坐标对参数 τ 的导数外，还包括我们引进的辅助函数 $e(\tau)$ 。不同的是，作用量并不包含 $e(\tau)$ 对于 τ 的导数。因此，这类力学变量是没有动力学的，它们只是一个辅助变量而已。

现在我们可以分别对于 $e(\tau)$ ， $x^\mu(\tau)$ 取变分。由于作用量不包含 $e(\tau)$ 的导数，因此对于它的变分就给出一个约束方程：

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} - e^2 m^2 c^2 = 0. \quad (7.15)$$

如果我们利用这个约束方程解出： $e = \sqrt{(dx^\mu/d\tau)(dx_\mu/d\tau)}/(mc)$ 并且代入作用量 (7.14)，我们就得到与本节开始给出的作用量 (7.1) 完全相同的结果。因此我们看到，作用量 (7.14) 在利用了约束条件 (7.15) 之后与原先的作用量 (7.1) 完全等价。从新的作用量也可以直接得到 x^μ 的运动方程： $d^2 x^\mu/d\tau^2 = 0$ ，这也与原先结果一致。

新的作用量 (7.14) 与原先的作用量比较至少有两个优点：第一，它不包含开根号的运算，因此求运动方程很简单；第二，它可以适用于零质量的情形。新的作用量也体现了世界线的**重参数化不变性**。如果我们令 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$ 为一个函数，那么只要我们保
 证**变换后的**单元基 $\tilde{e}(\tilde{\tau})$ 满足：

$$\tilde{e}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = e(\tau) d\tau, \quad (7.16)$$

就可以保证作用量不变。这些优点在目前我们经典范畴中还体现的不是很明显。但是，如果我们希望将这个系统量子化，我们必须从作用量 (7.14) 出发。⁹ 事实上，我们可以利用重参数化不变性选择一个合适的**规范**，比如 $e \equiv 1$ 。这时，约束条件 (7.15) 要求相应的量子系统的波函数要满足**克莱因 - 高登方程**。

搞定

32 电磁场中粒子的拉氏量

¶ 微观粒子除了具有质量这个内秉属性以外，还可以具有**电荷**。一个微观粒子所带的电量也是一个洛伦兹不变量。事实上大家都知道，任何微观粒子所带的电量都是某个基

⁸这个词源自广义相对论中的词“四元基” (tetrad，或者它的德文源头 vierbein)，它是用以描写四维流形的。对于一维流形，相应的词就是 einbein，我姑且译作“单元基”。

⁹尽管这样量子化后得到的理论 (克莱因 - 高登理论) 并不是一个自洽的量子理论。

本电量的整数倍。¹⁰ 一个带电的粒子作为源会在空间产生电磁场。同时，如果它处在一个外电磁场中，它就会与外电磁场发生电磁相互作用。我们假定一个外电磁场可以用四维时空中的一个4-矢量势 $A_\mu(x)$ 来描写。¹¹ 如果一个带电粒子的电量为 e ，那么它的作用量中现在还应该包括带电粒子与电磁场相互作用的部分。由于我们假设电磁场由4-矢势描写，所以唯一可能的洛伦兹不变的作用量必定可以写成：

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu(x) dx^\mu . \quad (7.17)$$

其中第一项是自由粒子的部分；第二项是带电粒子与外电磁场的4-矢量势相互作用的部分。常数 e 称为粒子所带的电量。我们要求它是一个洛伦兹标量，但是它的符号则没有限制。¹² 相互作用部分前面的系数 e/c 实际上依赖于对于电荷 e 的单位制的选取。我们这里的选择对应于标准的高斯制。电磁场的4-矢量势可以用时空分量的形式写成：

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x)) , \quad (7.18)$$

其中的时间分量 $\Phi(x)$ 被称为 **标量势**，而 $\mathbf{A}(x)$ 被称为 **矢量势**。它们又分别被简称为标势和矢势。如果把作用量表达式 (7.17) 中的积分用对时间的积分表达，我们就可以写出外电磁场中一个相对论性粒子的 **拉格朗日量**：

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\Phi . \quad (7.19)$$

它与自由粒子拉格朗日量的区别就在于加上了与外电磁场的相互作用。

¶ 得到了带电粒子的拉格朗日量，我们立刻可以写出粒子的正则动量 \mathbf{P} ：

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} . \quad (7.20)$$

我们发现，带电粒子在外电磁场中的正则动量除了它自身的相对论性动量 \mathbf{p} 之外，还包含了电磁场所贡献的一项 $(e/c)\mathbf{A}$ 。我们可以按照分析力学的标准步骤写出带电粒子的 **哈密顿量**（用正则动量表达）：

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - L = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\Phi . \quad (7.21)$$

¹⁰ 不包括夸克。夸克的电荷是基本电量的 $\pm 1/3$ 或 $\pm 2/3$ 。当然，在通常情况下，我们不会看到自由的夸克。

¹¹ 注意，这一点并不能直接从理论上证明。它只是一个假设。它的正确性由它所确立的结论与实验比较来确立。

¹² 相应于电荷的符号，我们称该粒子带正电或带负电。

33 运动方程与规范不变性

¶ 利用粒子在外电磁场中的拉格朗日量，我们可以直接按照拉格朗日方程写出它的运动方程。我们这里略去详细的推导过程（无非是一些无聊的矢量分析的计算），这个运动方程的三维形式为：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \frac{dE}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad (7.22)$$

其中 E , \mathbf{p} 是粒子的相对论性能量和动量，而 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 称为电场强度和磁感应强度，它们与电磁势的关系是：

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.23)$$

这些公式告诉我们，相对论性粒子动量的变化率由所谓的洛伦兹力的公式给出，并且电场和磁场与电磁势之间的关系也与我们第一章中得到的完全一致。

¶ 在分析力学中大家都知道这样一个事实：由于粒子的运动方程由最小作用量原理给出，所以严格来说一个粒子的拉格朗日量并不是唯一确定的。它可以相差任意函数对时间的全导数而不改变运动方程。具体到一个相对论性粒子在电磁场中的作用量 (7.19)，我们发现如果我们把电磁势做如下变换：

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \quad (7.24)$$

那么粒子的运动方程并不会改变。这种对称性被称为电磁场的规范对称性。上面的电磁势的变换被称为规范变换。这个概念我们在第一章中就已经遇到了，这里我们只不过从相对论性电动力学的基本原理出发重新得到了它。

¶ 与自由粒子的情形类似，我们也可以推导出四维协变形式的粒子运动方程。这时，我们直接从粒子的洛伦兹不变的作用量出发进行变分。对作用量 (7.17) 直接取变分得到：

$$\begin{aligned} \delta S &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\delta A_\mu dx^\mu + A_\mu \delta dx^\mu) \\ &= mc \int \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \frac{e}{c} \int (\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu dx^\mu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu \delta x^\mu), \end{aligned}$$

其中第一个积分就是自由粒子部分的贡献；第二积分中有两项，在第二步中我们对其中第二项进行了分部积分。现在我们将第二个积分中被积函数的第一项中求和的指标 μ 和 ν 互换，这样可将其与后项合并，从而给出一个相对论性粒子四维协变形式运动方程：

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu. \quad (7.25)$$

其中我们引入了电磁场场强的二阶（反对称）张量 $F_{\mu\nu}$ ，它的定义为：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (7.26)$$

我们看到，影响粒子运动方程的并不是电磁势 A_μ ，而是由此派生出来的电磁场 **场强张量** $F_{\mu\nu}$ 。简单的计算可以证明，电磁场的场强张量在规范变换下是不变的。如果对电磁势进行规范变换，虽然电磁势改变了，但是不影响带电粒子的运动方程。因此，在经典电动力学的范畴中，电磁势本身并不是可以直接测量的物理量。只有电磁场场强张量才是带电粒子所直接感受到的（即直接影响其运动方程的）相互作用。

¶ 按照电磁场的场强张量的定义具体的计算，同时结合电磁场与电磁势的关系 (7.23)，我们可以具体地将电磁场场强张量的各个分量写出：

$$F_{0i} = \mathbf{E}_i, F_{12} = -\mathbf{B}_3, F_{13} = +\mathbf{B}_2, F_{23} = -\mathbf{B}_1, \quad (7.27)$$

其余分量皆为零。我们可以将 $F_{\mu\nu}$ 写为矩阵的形式，

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ -\mathbf{E}_1 & 0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{B}_3 & 0 & -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{E}_3 & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.28)$$

至此我们看到：在狭义相对论中，电场和磁场结合成一个有机的整体—电磁场场强张量，¹³ 而所谓电场或磁场不过是这个张量中不同的分量而已。只有在狭义相对论时空中，电磁场的统一性才体现得如此淋漓尽致。¹⁴ 另外，利用电磁场张量的具体表达式我们不难验证，四维形式的运动方程 (7.25) 与前面给出的三维形式的运动方程 (7.22) 是完全一致的。

34 电磁场的作用量与电动力学的协变性

¶ 我们前一节看到，电磁场场强在洛伦兹变换下按照一个反对称二阶张量来变换：

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} . \quad (7.29)$$

这就是电磁场在一个一般的洛伦兹变换下的变换规则。具体地将上式用分量形式写出往往是相当复杂的。如果我们考虑的洛伦兹变换仅仅含有 boost，而没有三维空间的转动，

¹³在狭义相对论发展的早期，有的物理学家（例如闵可夫斯基）还给这类反对称的二阶张量一个怪怪的名称—六矢量（因为它有六个独立的非零分量）。

¹⁴而只有在类高斯电磁单位制中，电场和磁场才自然地具有相同的量纲。

那么利用上一章中的公式 (6.29) 进行直接计算, 我们可以得到电场和磁场的洛伦兹变换的明显表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

这个公式体现了在不同参照系的 boost 变换下, 电场和磁场是如何相互转换的。

¶ 按照电磁场场强张量的定义不难直接验证:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \quad (7.31)$$

如果将这个式子用三维的表达式写出, 同学们不难发现它恰好就是麦克斯韦方程中的两个齐次方程 (无源的方程)。这个式子完全是由于场强张量的反对称特性引出的, 在数学上它被称为 Bianchi 恒等式。

¶ 我们更为感兴趣的是, 如何利用电磁场场强张量来构造电磁场本身的作用量, 它必须是一个洛伦兹标量。¹⁵显然, 我们至少需要两个场强张量。而从两个场强张量能够构造出来的不变量有两个: ${}^{16}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \propto (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ 和 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} \propto (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ 。前者是一个纯粹的标量, 而后者实际上是一个赝标量。如果我们要求电磁场本身的作用量是一个洛伦兹标量的话, 那么我们发现, 电磁场的作用量一定可以写成:

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (7.32)$$

其中前面的系数实际上依赖于 **电磁单位制** 的选取, 对于高斯制这个系数正好是: $-1/(16\pi c)$ 。

¶ 为了能够得到电磁场的运动方程, 我们需要将带电粒子与电磁场相互作用部分的作用量稍加改写。我们设想电荷是连续分布在空间的。为此, 引入空间一点的电荷密度 $\rho(x)$ 。需要指出的是, 它 **不是** 一个洛伦兹不变量。只有某个体积内的总电量 $\rho d^3\mathbf{x}$ 才是洛伦兹不变的。于是:

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu \rho \frac{dx^\mu}{dt} d^4x.$$

¹⁵我们这里要求得到的电磁场作用量还具有规范不变性。这样一来, 我们必须从 $F_{\mu\nu}$ 出发来构造电磁场的作用量而不是从电磁势 A_μ 本身出发。事实上, 如果放弃规范不变性并且允许电磁势直接构造作用量的话, 类似于 $A^\mu A_\mu$ 的项也满足洛伦兹不变性。

¹⁶利用这两个不变量实际上可以得到许多重要结论。例如, 如果在一个参照系中磁场与电场垂直 (从而 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), 那么在任意参照系中两者一定仍然垂直。同样, 如果在一个参照系中仅存在电场, 磁场为零, 那么在任何参照系中电场不可能等于零。

于是，我们发现量 $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$ 实际上是一个逆变 4-矢量，我们于是可以定义电流密度 4-矢量：

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{J}) . \quad (7.33)$$

利用它，在闵氏时空中电荷守恒定律（即电荷的连续性方程）可以写成协变的形式：

$$\partial_\mu J^\mu = 0 . \quad (7.34)$$

至此，我们已经得到与电磁场有关的作用量的所有部分：

$$S = -\frac{1}{c^2} \int d^4x A_\mu J^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (7.35)$$

我们现在可以利用最小作用量原理得到在给定的外源 $J^\mu(x)$ 的条件下，电磁场场强张量所应当满足的运动方程：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu . \quad (7.36)$$

读者不难验证，如果写成三维分量形式，它就是麦克斯韦方程中有源的两个方程。

至此我们已经看到：一个电磁场中带电粒子的运动方程 (7.25) 以及电磁场本身所满足的麦克斯韦方程 (7.31) 和 (7.36) 都可以写成四维协变的形式。于是我们可以自豪地说，我们已经验证了电动力学与狭义相对论时空观的一致性。这种一致性意味着，在不同惯性参照系中所发现的电磁规律都是相同的：星星还是那个星星，月亮还是那个月亮。我们终于可以松一口气，只要学习了一个惯性系中的电动力学就足够了，因为在任何其他惯性系中它的形式都是一样的。

35 均匀静电磁场中带电粒子的运动

作为本章最后的一个应用，我们来讨论静态电磁场中一个带电粒子的运动问题。这类问题在物理学的很多领域中都会遇到（特别是加速器物理）。我们将假设粒子的运动一般是相对论性的。只要将本节的结果取非相对论极限，就可以得到相应的非相对论的结果。为了与相关的非相对论结果比较，我们将采用三维形式的运动方程 (7.22) 来讨论。

35.1 带电粒子在均匀静电场中的运动

考虑一电荷为 e 、质量为 m 的带电粒子在一外加均匀静电场中的运动。均匀静电场的电场强度为 \mathbf{E}_0 。这种情形下该粒子的运动方程非常简单： $d\mathbf{p}/dt = e\mathbf{E}_0$ 确定了粒子相对论性动量 \mathbf{p} 的变化率，而 $dE/dt = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ 则给出了粒子相对论性能量的变化率。于是我们

有: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + e\mathbf{E}_0 t$ 。能量的变化率方程实际上是 $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$ 的直接结果。因此, 在一个均匀静电场中, 粒子将不断被加速, 在大的时间间隔后, 其能量大致按照时间成正比地增加。这也就是加速器加速带电粒子的基本原理。

35.2 带电粒子在均匀静磁场中的运动

¶ 这种情形下, 粒子的能量并不随时间变化: $dE/dt = 0$, 即均匀静磁场仅仅是改变粒子动量的方向, 并不改变它的能量。因此, 在这种情形下粒子速度 \mathbf{v} 的大小 (同时相对论因子 γ) 也不随时间变化。因此, 粒子的动量变化率的运动方程可以等价地写为:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B, \quad (7.37)$$

其中我们定义了

$$\boldsymbol{\omega}_B = \frac{e\mathbf{B}}{\gamma mc} = \frac{ec\mathbf{B}}{E}, \quad (7.38)$$

它的大小被称为 **回旋频率** (gyration frequency)。这个运动方程描写的是一个在垂直于磁场平面上的匀速圆周运动再叠加上一个平行于外磁场方向的匀速直线运动 (这又被称为 **漂移运动**)。如果我们取外磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ 沿着 $+z$ 的方向, 那么运动方程的解可以表达为:¹⁷

$$\mathbf{v}(t) = v_{\parallel}\mathbf{e}_3 + \omega_B a(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)e^{-i\omega_B t}, \quad (7.39)$$

其中 v_{\parallel} 是粒子速度沿着磁场方向的分量 (又称为平行分量)。上式中的 **回旋半径** a 由下式给出:

$$a = \frac{cp_{\perp}}{eB}, \quad (7.40)$$

其中 p_{\perp} 是带电粒子相对论性动量的垂直分量。这个公式的意义在于, 根据粒子在磁场中弯曲的情形及其电荷, 就可以确定其垂直方向的动量。反之, 如果知道其动量的垂直分量以及其回旋半径, 也可以确定其电荷。如果愿意, 我们还可以将粒子的速度再积分一次, 得到粒子运动的轨迹:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + v_{\parallel}t\mathbf{e}_3 + ia(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)e^{-i\omega_B t}. \quad (7.41)$$

这个轨迹描写的是一条围绕外磁场方向的螺旋线。

35.3 带电粒子在均匀正交静电磁场中的运动

¶ 下面我们来讨论一个带电粒子在均匀正交静电磁场中的运动。我们注意到, $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ 以及 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ 都是洛伦兹不变量。因此, 对于均匀正交静电磁场, 由于 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$,

¹⁷为了方便起见, 这个公式利用了复数表达形式。真正物理的速度应当理解为公式所给出的复矢量的实部。

任何的洛伦兹变换后的电磁场将仍然是正交的。事实上，很容易证明：如果 $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ ，那么我们可以找到一个合适的洛伦兹变换，使得变换后的参照系中 $\mathbf{E}' = 0$ ， $\mathbf{B}' \neq 0$ ；反之，如果 $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ ，那么我们可以找到一个合适的洛伦兹变换，使得变换后的参照系中 $\mathbf{E}' \neq 0$ ， $\mathbf{B}' = 0$ 。因此，带电粒子在均匀正交静电磁场中的运动问题可以完全化为其在均匀静磁场或者均匀静电场中的运动问题。

首先假设均匀正交静电磁场满足 $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ ，如果我们做一个洛伦兹 boost，其速度为：¹⁸

$$\mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (7.42)$$

那么利用电磁场的变换公式 7.30，我们可以证明在新的参照系中的静电场将恒于零，并且静磁场也仅仅具有垂直于 \mathbf{u} 的分量：

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{B} = \sqrt{\frac{B^2 - E^2}{B^2}} \mathbf{B}, \quad (7.43)$$

其中 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}$ 。在新的参照系中，粒子的运动回到前面讨论的均匀静磁场的情形，即粒子将围绕磁场的方向做螺旋运动。

如果均匀正交电磁场满足 $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ ，那么我们需要 boost 的速度由下式给出：

$$\mathbf{u} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2}. \quad (7.44)$$

在新的参照系中，静磁场将恒等于零而静电场将仅仅有垂直于 \mathbf{u} 的分量并且满足：

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{E} = \sqrt{\frac{E^2 - B^2}{E^2}} \mathbf{E}. \quad (7.45)$$

这时在新的参照系中粒子的运动回到在一个单纯的均匀静电场中的情形。粒子将在电场中不断被加速。

35.4 带电粒子在一般均匀静电磁场中的运动

¶ 如果均匀静电磁场满足 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ ，那么我们不可能利用洛伦兹变换将电场或者磁场之一完全去掉。粒子的运动—无论在任何参照系来看—都是在既有静电场、又有静磁场的情形下进行的。这时的运动方程仍然可以解出来，只不过其运动的特性没有前面几种情形那么简单了。

这时更为简单的实际上是利用四维形式的运动方程 7.25：

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu}_{\nu} u^{\nu}. \quad (7.46)$$

这可以视为粒子的四速度 $u^{\mu}(\tau)$ 关于粒子原时 τ 的参数方程。对于均匀静态电磁场，场强张量 F^{μ}_{ν} 为常张量。事实上，我们可以将四速度 $u^{\mu}(\tau)$ 视为列矢量，将 F^{μ}_{ν} 视为常矩阵

¹⁸注意，由于 $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ ，因此这个速度是小于真空中光速的可实现的物理速度。

\mathbb{F} ，这样我们可以将运动方程表达为矩阵形式：

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{e}{mc} \mathbb{F} \cdot u. \quad (7.47)$$

对于均匀静电磁场，我们的场强矩阵 F 可以利用第 30 节中给出的洛伦兹变换的生成元 \mathbf{K} 和 \mathbf{S} 写为：¹⁹

$$\mathbb{F} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}. \quad (7.48)$$

因此，四速度的一个积分立即可以得到：

$$u(\tau) = \exp\left(\frac{e\tau}{mc} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}]\right) \cdot u(0). \quad (7.49)$$

如果愿意，这个表达式还可以再积分一次得到粒子世界线的参数方程。



相关的阅读

本章是主要讨论的是相对论电动力学基本理论框架。我们从对称性和分析力学的基本原理出发，推导出了所有的电磁规律的协变形式。我们的讨论是相当简略的。我们希望读者从这种简略的讨论中能够体味到整个理论框架的轮廓。更为详细的推导同学们可以参考 [10]，事实上我们这一章的讨论的主要流程就取自 [10]。对于那些不熟悉分析力学的同学，我的心在为你们流血，因为你们可能错过了电动力学中最为精妙的一部分（至少我个人这样认为）。不过正如在这一章开始所说的，重要的是本章的最终结论。这个结论我希望所有学习过电动力学课程的同学能够记住（最好一辈子）：麦克斯韦电磁理论是协变的理论。

¹⁹参考公式 (6.27)。

第八章 运动带电粒子的辐射

本章提要

- 李纳 - 维谢尔势 (36)
- 非相对论加速电荷的辐射 (37)
- 相对论加速电荷的辐射 (38)
- 切伦可夫辐射 (41)
- 辐射阻尼 (42)

前面我们在讨论电磁波的产生时曾经简要地讨论过电磁波的辐射问题。那里处理的
主要是宏观周期振荡的源所辐射的电磁波。另一方面，处在电磁场中的微观粒
子在加速或减速时也会辐射电磁波。这种带电粒子的辐射往往在粒子高速运动时变得更为显著。因此，讨论高速运动时加速带电粒子的电磁辐射的一个自然的出发点就是以狭义相对论为基础的相对论性电动力学。

这一章中，我们就简要讨论运动的带电粒子所产生的电磁辐射的各种特性。这实际上是一个相当广泛的课题。我们这里的讨论将侧重于它的理论基础部分，对于具体问题则涉及到的比较少。这些具体问题是 **加速器物理** 中应当关注的。我们将首先利用相对论电动力学的方法推导出一个带电粒子在空间所产生的电磁势（也就是所谓的李纳 - 维谢尔势）。虽然我们也可以利用第五章的理论框架来讨论微观粒子的辐射问题，所需要的仅仅是将一个微观粒子的运动电流密度（它包含 δ -函数）带入到第 22 节中的公式 (5.8)，这样即可得到所谓的李纳 - 维谢尔势，但是我们这里准备直接从四维形式的理论框架出发来处理这个问题。利用李纳 - 维谢尔势，我们将分别讨论非相对论性和相对论性的带电粒子在加速运动时的辐射。我们还会讨论一个带电粒子（典型的粒子是电子）对于电磁波的散射（称为汤姆孙散射）。随后，我们介绍快速带电粒子通过介质时产生的切伦可夫辐射。最后，我们将简要讨论带电粒子与它自身的辐射场之间的自相互作用问题，这被称为辐射阻

尼。辐射阻尼问题的讨论同时也揭示了经典电动力学的适用范围。

36 李纳-维谢尔势

¶ 让我们从前一章中的四维协变形式的麦克斯韦方程出发：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu,$$

将 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 代入，我们得到：

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (8.1)$$

其中我们已经取了洛伦兹规范条件： $\partial_\mu A^\mu = 0$ 。这个公式实际上就是电磁势满足的波动方程的四维协变形式。在第 22 节中，我们已经得到了电磁势的推迟解。为了以后的方便，我们需要将它写成四维协变的形式。这可以通过改写第 22 节中的公式得到，不过更为简单的（至少是更为方便的）是直接求解方程 (8.1) 的四维协变形式的解。为此，我们将需要四维协变形式的格林函数 $D(x, x')$ ，它满足：

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (8.2)$$

这个方程可以利用傅立叶变换来求解。我们将要求的格林函数写成：

$$D(x, x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot (x - x')},$$

其中傅立叶变换指数上的点乘表示 4-矢量的内积。利用 δ -函数的傅立叶变换，我们立刻得到： $\tilde{D}(k) = -(1/k^2)$ ，所以：

$$D(x, x') = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x - x')}}{k^2},$$

其中 $k^2 \equiv k \cdot k = k_\mu k^\mu$ 。需要注意的是：这个式子到目前为止还只是一个形式表达式，原因是上面被积函数的分母： $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ 在 k_0 积分的实轴上存在奇点，我们必须对它的涵义给出一个明确的定义。事实上这等价于在 k_0 的复平面上为 k_0 的积分选取恰当的路径。不同的路径定义了不同的格林函数。我们物理上需要的是推迟格林函数，因为这才是符合因果性的格林函数，它对应的路径被显示在图 8.1 中（即图中红色的路径），相应的表达式为：¹

$$D^{(+)}(x, x') = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x - x')}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}, \quad (8.3)$$

¹如果在公式 (8.3) 中我们在被积函数的分母中取 $(k_0 - i\epsilon)^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ ，我们就得到了超前格林函数 $D^{(-)}(x, x')$ 。

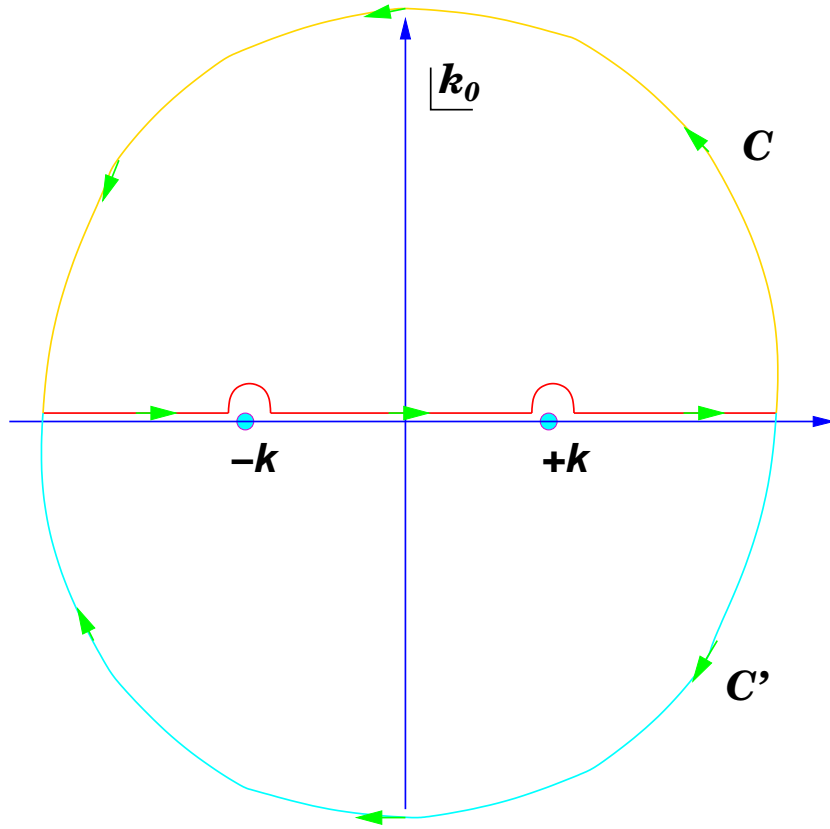


图 8.1: 四维协变形式的推迟格林函数 (8.3) 所对应的复 k_0 平面的围道。当 $x_0 < x'_0$ 时, 积分可以从上半平面的围道 C 完成, 得到的结果是零; 当 $x_0 > x'_0$ 时, 积分可以从下半平面的围道 C' 完成, 得到的结果等于在两个奇点 $\pm|\mathbf{k}|$ 处的残数之和。

其中 $\epsilon = 0^+$ 为一正无穷小, 这个选择相当于从 k_0 平面上的两个奇点 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$ 的上方绕过去的围道。由于两个奇点都在此积分围道的下方 (参见图 8.1), 因此我们发现: 如果 $x_0 < x'_0$, 也就是说如果观测点的时间比源所在的时间点超前, 我们可以将对于 k_0 的积分从 **上半平面** 的无穷远处绕回来, 从而证明格林函数 $D^{(+)}(x, x') = 0$ 。因此它的确是一个推迟格林函数。反之, 如果 $x_0 > x'_0$, 我们的围道则必须从下半平面绕回来, 这个积分不等于零而是等于其中的残数之和。由于仅有的奇点就在 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$ 处, 经过一些具体运算我们就得到:²

$$D^{(+)}(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R) = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \delta[(x - x')^2]. \quad (8.4)$$

这个表达式与第 22 节中的格林函数表达式完全一致。

²其中需要利用 δ -函数的标准表达式: $\delta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}$ 。

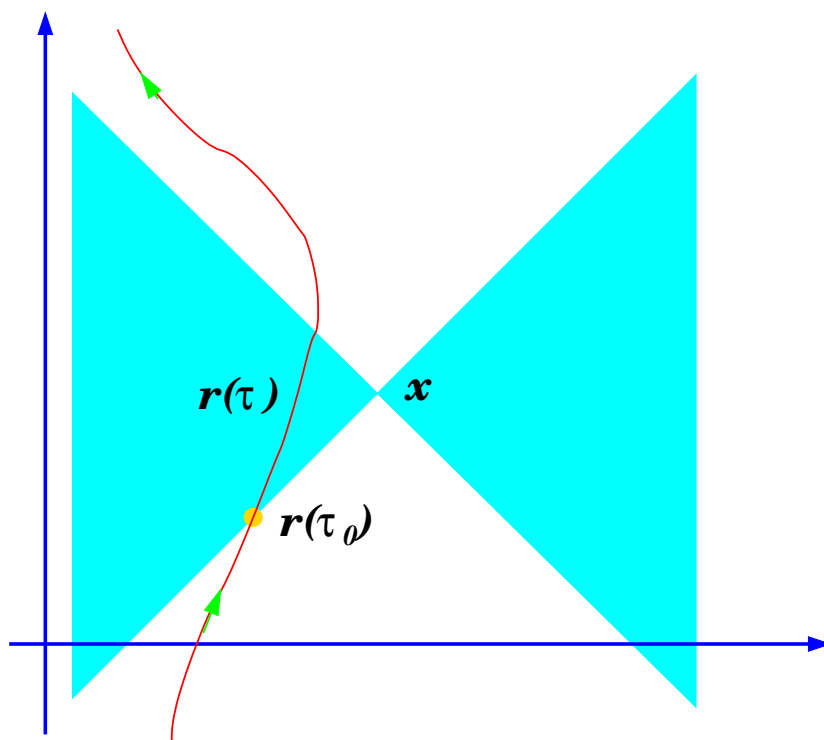


图 8.2: 李纳 - 维谢尔势的示意图。运动粒子的世界线用方程 $r(\tau)$ 来表示，观测的时空点是 x 。粒子的世界线与位于 x 处的光锥有两个交点，其中位于点 x 过去的光锥上的交点正好对应于点 x 所接收到的电磁势。

利用前面得到的四维协变形式的推迟格林函数，我们可以写出电磁势的协变形式解：

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D^{(+)}(x - x') J^\mu(x'), \quad (8.5)$$

其中 $J^\mu(x')$ 是一个带电粒子所产生的四维电流密度。

¶ 对于一个在四维时空中运动的带电粒子，它的轨迹可以用一条 **世界线** 来表示。假定世界线的参数方程为： $r^\mu = r^\mu(\tau)$ ，其中 τ 可取为粒子的固有时间，那么这个粒子的四维电流密度可以写成：

$$J^\mu(x') = ec^2 \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}[x' - r(\tau)], \quad (8.6)$$

其中 $u^\mu(\tau)$ 是粒子的（无量纲的）四速度矢量。将电流密度的表达式代入到前面的 $A^\mu(x)$ 的表达式中，我们可以完成对于 x' 的积分得到：

$$A^\mu(x) = 2ec \int d\tau u^\mu(\tau) \theta[x^0 - r^0(\tau)] \delta[(x - r(\tau))^2]. \quad (8.7)$$

由于 δ -函数的存在，这个积分只在一个特定的时间 τ_0 有贡献，它满足所谓的 **光锥条件**：

$$(x - r(\tau_0))^2 = 0, \tag{8.8}$$

同时加上条件： $x^0 > r^0(\tau_0)$ 。于是，利用关系：

$$\delta[(x - r(\tau))^2] = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{\left| \frac{d}{d\tau}(x - r(\tau))^2 \right|_{\tau=\tau_0}}$$

我们就得到了时空中任意一点 x 处的电磁势：

$$A^\mu(x) = \frac{eu^\mu(\tau)}{u \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0}. \tag{8.9}$$

这就是一个带电的运动粒子所产生电磁势的四维协变表达式，它被称为带电粒子的 **李纳 - 维谢尔势** (Liénard-Wiechert potential)。四维协变形式的电磁势虽然看上去十分简洁，但显得不够直观，人们在实际应用中更愿意将它写成具体的三维分量形式。令： $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0) \equiv R\mathbf{n}$ 并利用光锥条件： $x_0 - r_0(\tau_0) = R$ ，我们有： $u \cdot [x - r(\tau)] = \gamma R - \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}R = \gamma R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$ ，从而李纳-维谢尔势可以写为：

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}, \tag{8.10}$$

其中脚标 **ret** 代表括号内的所有物理量必须按照光锥条件 (8.8) 在 **推迟的** (retarded) 时间： $r_0(\tau_0) = x_0 - R$ 来计算。公式 (8.10) 和公式 (8.9) 都被称为李纳-维谢尔势。在图 8.2 中，我们显示出了观测点的时空坐标 x 以及位于该点的光锥（图中有阴影的部分）。我们还画出了运动带电粒子的世界线 $r(\tau)$ 。它会与原点位于 x 的光锥相交于两点。我们将位于时空点 x “过去”的交点所对应的粒子固有时称为 τ_0 。李纳-维谢尔势的公式说明，粒子运动到 $r(\tau_0)$ 位置时的电磁势正好在稍后的时空点 x 被感受到。

¶ 得到了带电粒子的电磁势，原则上我们就可以求出它所对应的电磁场，虽然这个推导的过程有些复杂。³ 一种比较简单的方法是从包含 δ -函数的积分表达式 (8.7) 出发。如果我们仅仅考虑 $R > 0$ 的区域，那么我们得到：

$$\partial^\nu A^\mu = 2ec \int d\tau u^\mu(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\nu \delta[(x - r(\tau))^2].$$

这里唯一比较需要技巧的是偏微商作用在 δ -函数上的结果。它实际上可以换成对于 τ 的微商。利用：

$$\partial^\mu \delta[f(x, \tau)] = \partial^\mu f \frac{d}{df} \delta[f(x, \tau)] = \partial^\mu f \frac{d\tau}{df} \frac{d}{d\tau} \delta[f(x, \tau)],$$

³虽然原则上讲从三维形式的李纳-维谢尔势 (8.10) 出发，进行必要微分运算得到运动粒子所产生的电磁场，但因为微分的过程中必须正确处理推迟的效应，因此并不简单。有兴趣的同学可以参考 [2] 中的相关推导。

其中函数 $f = (x - r(\tau))^2$ ，于是我们得到：

$$\partial^\mu \delta[(x - r(\tau))^2] = -\frac{(x - r)^\mu}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta[(x - r(\tau))^2].$$

将这个结果代入并且对 τ 分部积分，再利用 δ -函数完成对 τ 的积分，最后我们得到：

$$F^{\mu\nu} = \left\{ \frac{ec}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x - r)^\mu u^\nu - (x - r)^\nu u^\mu}{u \cdot (x - r)} \right] \right\}_{\tau=\tau_0}. \quad (8.11)$$

我们也可以将它写成更为明显的三维分量形式。我们需要的是下列关系：

$$(x - r)^\mu = (R, R\mathbf{n}), \quad u^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}), \quad \frac{d}{d\tau}[u \cdot (x - r)] = -c + (x - r)^\mu \frac{du_\mu}{d\tau},$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad \gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^4 \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right).$$

利用这些关系，我们可以将电磁场明确写出：

$$\mathbf{E} = \left[\frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{e \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E})_{\text{ret}}. \quad (8.12)$$

这个公式中的电场分为两项：第一项是典型的静态场，它正比于 $1/R^2$ ；第二项是典型的辐射场，它正比于 $1/R$ 并且正比于粒子的加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 。因此，对一个做匀速运动的粒子来说，它所产生的场将只有静态场部分，当然所有的场量都要在推迟的时间来计算。

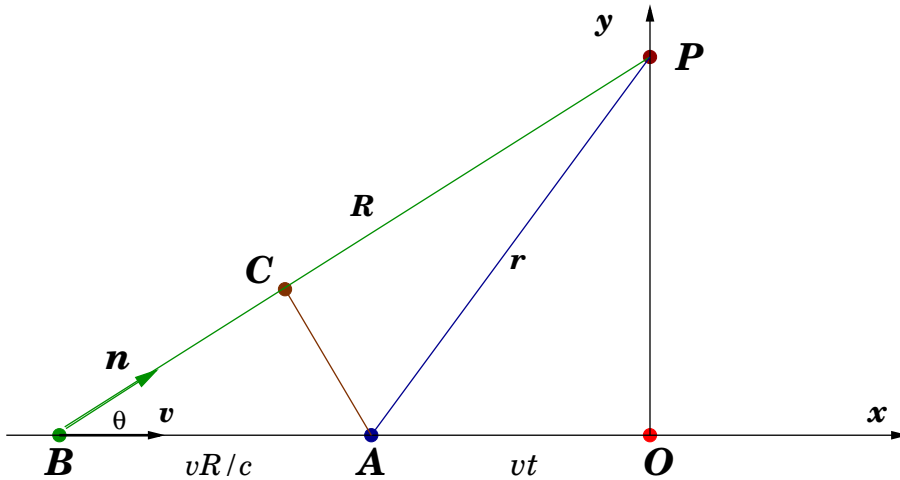


图 8.3: 一个匀速运动的电荷在点 P 处所产生的场。这个问题可以通过洛仑兹变换 (7.30) 或者直接利用本节的公式 (8.12) 来计算。

例题 8.1 一个匀速运动的电荷所产生的电磁场 在这个例子中, 我们将用两种不同的方法计算一个匀速运动的电荷所产生的电磁场。为了简化讨论, 我们假定观测者所在的参照系为 K , 并且观测点 P 的坐标为: $\mathbf{x}_P = (0, b, 0)$ 。我们假定一个电量为 q 的电荷沿着 x 轴的正方向以速度 v 运动。我们选取时间的零点使得在 $t = 0$ 时刻, 电荷正好通过坐标原点 (这时它与观测点的距离也最近并且等于 b)。我们将分别利用电磁场的洛仑兹变化方法以及本节中导出的运动电荷产生的电磁场公式 (8.12) 来计算电荷在空间点 P 所产生的电磁场 (参见图 8.3)。

解: 首先, 让我们利用电磁场的洛仑兹变换的方法来计算。这个方法的出发点是首先计算出随着带电粒子一同运动的参照系 K' 中的电磁场。这是十分简单的, 因为它就是一个点电荷的静库仑场。然后, 我们可以利用电磁场的洛仑兹变换 (7.30) 给出在参照系 K 中的电磁场。按照这个思路, 我们首先写出 K' 系中的电磁场:

$$\mathbf{E}' = \left(-\frac{qvt'}{r'^3}, \frac{qb}{r'^3}, 0 \right), \quad \mathbf{B}' = (0, 0, 0). \quad (8.13)$$

其中 $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$ 是 K' 系中电荷到观测点的距离。这个表达式就是点电荷的库仑场的表达式。由于我们关心 K 系中的电磁场, 我们希望首先将它表达为 K 系中的坐标。唯一需要转换的就是 $t' = \gamma t$ 。于是我们有:

$$\mathbf{E}' = \left(-\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, 0 \right). \quad (8.14)$$

剩下的就是利用公式 (7.30) 的逆变换 (改变该公式中速度的符号) 给出 K 系中的电磁场表达式:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{E}_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{B}_3 = \beta \mathbf{E}_2. \end{cases} \quad (8.15)$$

其他的分量都恒等于零。

现在我们直接利用本节导出的公式 (8.12) 来计算。我们只需要其中的第一项的贡献。这里唯一需要注意的是, 这个公式中的各个坐标都是用推迟的坐标来表达的。因此, 为了与前面第一种方法所得到的结果进行比较, 我们需要将推迟的坐标表达为一般的坐标。为此我们利用光锥条件得到推迟时间 t^* 满足的方程: $c(t - t^*) = R$ 。因此在 x 轴上推迟的点和辐射发生的点之间的距离为: $v(t - t^*) = \beta R$ 。也就是说, 当粒子运行到点 A 时产生的场必须用粒子在点 B 时的坐标来表达 (参见图 8.3 上显示的几何关系)。利用光锥条件可以验明距离 AB 为 βR 。如果我们从点 A 向线段 PB 引垂线, 垂足为点 C , 那么距离 PC 为 $(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R$ 。因此我们可以得到: $[(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R]^2 = r^2 - (AC)^2 = r^2 - \beta^2 R^2 \sin^2 \theta = b^2 + (vt)^2 - \beta^2 b^2 = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)/\gamma^2$ 。利用这个关系很容易发现前面的电场可以写为:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} = \left[\frac{qb}{\gamma^2 (1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3 R^3} \right]_{\text{ret}}. \quad (8.16)$$

电磁场的其他非零分量也可以类似验证。于是我们证明了，利用洛仑兹变换得到的电磁场表达式与本节所得到的电磁场表达式完全一致。 搞定

这里顺便指出，李纳-维谢尔势的另外一种推导方法就是首先在粒子的静止系中写出带电粒子的库仑势，然后再做一个洛仑兹变换就可以得到普遍的李纳-维谢尔势 (8.10)。当然，这种推导方法依赖于一个 **先验的** 假定，即电磁势必须仅仅依赖于粒子的速度，不依赖于它的加速度。我们知道，一个带电粒子的电磁场一般依赖于它的速度和加速度。因此，对于一个有加速度的带电粒子而言，如果我们首先在它的静止系中写出库仑场（而不是库仑势），然后再进行洛仑兹变换（正像上面的例子中那样），那么我们一般不能够得到完整的电磁场。事实上，我们只能得到公式 (8.12) 中不依赖于加速度的一项。

37 拉摩公式与汤姆孙散射

¶ 现在我们来讨论一个非相对论性带电粒子的辐射功率及角分布。显然，带电粒子所辐射的功率只来自于公式 (8.12) 中的第二项（含有加速度的一项）。这时电场可以近似写成：

$$\mathbf{E} = \left[\frac{e \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{c R} \right]_{\text{ret}}, \quad (8.17)$$

这个辐射场所辐射的功率可以由相应的玻印廷矢量得出：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta. \quad (8.18)$$

其中 Θ 是粒子的加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 与单位矢量 \mathbf{n} 之间的夹角， $d\Omega$ 是 \mathbf{n} 方向的立体角元。将上式对于立体角积分，就可以得到带电粒子辐射的总功率：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (8.19)$$

这个简洁的公式被称为 **拉摩公式**，它给出了一个做非相对论性运动的加速带电粒子所辐射的总功率。这个公式可以 **推广** 到相对论的情形。为此，我们首先注意到能量在相对论中是一个 4-矢量的零分量，时间也是如此。所以辐射功率实际上是一个洛伦兹不变量。再注意到拉摩公式可以表达为：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^3 c^3} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

因此，它的洛伦兹不变的推广显然是：

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^3 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2], \quad (8.20)$$

这里 p^μ 是带电粒子的 4-能量动量矢量，而 τ 是带电粒子的固有时间。上面公式中三维分量的形式被称为 **李纳公式**，它是李纳 (Alfred-Marie Liénard) 在 1898 年首先得到的。

¶ 作为拉摩公式的一个具体应用，我们下面讨论一个自由电子对电磁波的散射问题。这类散射问题首先由 J.J. Thomson 研究因而被称为 **汤姆孙散射** (Thomson scattering)。当频率为 ω 的电磁波入射到一个自由电子上的时候，电磁波的电场： $\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ 会使得自由电子获得加速度： $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_0 (e/m) E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ 。按照公式 (8.17) 和 (8.18)，并且对于在一个周期内平均，电子向外辐射的具有偏振 \mathbf{e} 的电磁波的平均功率角分布为：

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2. \quad (8.21)$$

将上式除以入射的电磁波的能量流，我们就得到了自由电子对于电磁波微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2. \quad (8.22)$$

为了更明确地写出这个表达式，我们选取 \mathbf{k}_0 沿着正 z 方向；散射波的波矢方向的单位矢量为 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ；与 \mathbf{n} 垂直的两个独立的线偏振方向可以选为：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \theta [\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi] - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \\ \mathbf{e}_2 &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \end{aligned}$$

将两种可能的偏振相加并且对初态的偏振平均，我们就得到非极化的微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (8.23)$$

这就是关于汤姆孙散射的非极化微分散射截面公式，称为 **汤姆孙公式**。将它对于立体角积分就得到了总的散射截面：

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (8.24)$$

¶ 上面关于汤姆孙散射的讨论仅仅对于低频的电磁波的散射是正确的。当电磁波的频率增加到一定程度，电磁辐射的量子效应就必须加以考虑了，对电子来说这就是著名的 **康普顿效应**。康普顿在 1923 年发现，硬 X-射线照射到物质后的散射光频率会变得比原先入射光的小。这实际上是由于物质中的电子与入射光子发生了散射（这种散射后来自然地被称为 **康普顿散射**），由于光子的 **量子性**，它的部分能量和动量会传递给电子因而频率变小。康普顿还论证了，必须同时利用狭义相对论的运动学和（光子的）量子化的能量-动量表达式才能够完美地解释康普顿效应。正因为如此，康普顿效应也被视为在量子理论确立过程中起到关键作用的重大实验之一。

38 相对论性加速电荷的辐射

¶ 如果一个加速电荷的速度与光速可以比拟，它的相对论效应就不能忽略了。这时电荷辐射的总功率可以通过将拉摩公式 (8.19) 进行相对论性推广而得到，这就是李纳公式 (8.20)。所以这一节中我们将着重分析相对论性粒子辐射的角分布特性。

我们可以写出玻印廷矢量沿径向单位矢量 \mathbf{n} 的投影：

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})_{\text{ret}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left(\frac{1}{R^2} \left| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 \right)_{\text{ret}},$$

这个公式所表示的是位于观测点 \mathbf{x} 、在 t 时刻所观测到的辐射能流，这些能量是带电粒子在时刻 $t' = t - R(t)/c$ 所辐射的。一个更为恰当的物理量是带电粒子在一段时间内所辐射的总能量。例如，在 $t' = T_1$ 到 $t' = T_2$ 之间粒子所辐射的能量可以写成：

$$E = \int_{T_1 + R(T_1)/c}^{T_2 + R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})_{\text{ret}} dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} dt'$$

所以我们看到，我们真正感兴趣的物理量是 $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(dt/dt')$ 。为此，我们定义粒子在单位立体角内的辐射功率：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.25)$$

将粒子辐射能流的公式代入，我们得到：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5}. \quad (8.26)$$

这个公式是前一节公式 (8.18) 的相对论推广。

¶ 作为一个例子，让我们首先来考察直线加速粒子的辐射角分布。这时 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 沿同一方向，我们将其取为 z 方向。如果观测点位置与 z 轴的夹角用 θ 来表示，那么辐射角分布为：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}. \quad (8.27)$$

显然，当 $\beta \sim 0$ 时，这个公式回到公式 (8.18)。但与非相对论的情况不同的是，随着粒子速度接近光速，上式中分母的效应越来越显著。我们可以发现，使得上面辐射功率达到极大值的角度 θ_{max} 满足：

$$\cos \theta_{\text{max}} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}. \quad (8.28)$$

显然，当 $\beta \rightarrow 1$ 时， $\theta_{\text{max}} \rightarrow 0$ ，也就是说粒子的辐射会越来越集中于向前的方向。如果将上式对角度积分，我们就重新得到了总辐射功率的李纳公式 (8.20)。

¶ 另一个经常出现的情况是粒子做圆周运动的情形。这时 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 相互垂直。如果我们令 $\boldsymbol{\beta}$ 沿 z 方向； $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 沿 x 方向，那么在球坐标为 (θ, ϕ) 的观测方向上的辐射功率为：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (8.29)$$

这个公式虽然看上去比直线加速的情形更为复杂，但是极端相对论性的粒子辐射仍然具有集中向前辐射的特性。如果将上式对角度积分，我们仍然得到李纳公式 (8.20)。

¶ 加速带电粒子所辐射的功率对于加速器的设计而言是十分重要的技术信息。**加速器** 是粒子物理学家用来研究微观粒子之间相互作用的重要实验手段。它主要是通过 $\bullet \bullet \bullet$ 在电场中加速带电的粒子（一般是正负电子、正反质子等），使得带电粒子的能量不断提高。这些带电粒子流最后以很高的能量进行相互碰撞。从碰撞的产物中，粒子物理学家能够获取许多关于微观粒子相互作用的重要物理信息。随着技术的发展，粒子物理实验已经发展到相当的技术水平，目前世界上的加速器往往需要将电子或者质子加速到接近光速的水平。⁴按照我们这一节的讨论，随着粒子从外电场中获取能量而被加速，它也因为辐射电磁波而损失能量。如果一个加速器在设计运行的状态下，粒子从外电场获得的能量与它辐射的能量大致相当了，这时粒子就无法继续被加速了。它的能量也就趋于一个饱和值。因此，了解带电粒子辐射的功率能够帮助我们在加速器建造之前，事先了解加速器的电磁场设计参数从而是十分重要的。

目前正在运行或准备建造的加速器大致可以分为两类：直线加速器和环行加速器。按照李纳公式的估计，一个直线加速器中带电粒子的辐射功率与带电粒子的动量变化率的平方成正比：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2, \quad (8.30)$$

由于电子在所有粒子中具有最大的荷质比，因此加速电子时辐射的效应最大。实际的加速器的数据显示，即使对于电子而言，这个辐射的功率一般远远小于电子从外场中获得的能量。因此，在直线加速器中，粒子辐射的影响几乎是完全可以忽略的。因此，从节约能源的角度讲，直线加速器无疑是最优的。但是，直线加速器往往受制于其他一些因素（总的尺度、地震影响等等）。

环行加速器中的情况就完全不同了。这时，粒子速度的方向频繁变化，但在一个周期中粒子获得的外场能量却不是很大，这时粒子会将大量的能量辐射掉。即使保持这些带电粒子匀速圆周运动，外场也必须提供大量的能量。类似于公式 (8.30)，我们得到的相应结果是：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2, \quad (8.31)$$

也就是说，对于同样的受力，做圆周运动的粒子比直线运动的粒子所辐射的功率要大一个因子 γ^2 。这个因子对于极端相对论性的粒子来说是相当可观的。

⁴例如，位于欧洲核子中心目前正在运行的所谓大型强子对撞机（Large Hadron Collider, LHC），其设计的质心系能量为 14 TeV。这意味着，在对撞时，质子的速度已经接近光速到九位有效数字。

39 粒子辐射的频谱

¶ 前面的讨论主要涉及带电粒子辐射的功率和角分布。另一个与带电粒子辐射相关的是其辐射电磁波的能量按照所辐射电磁波频率的分布，这称为辐射的**频谱**。这一节中，我们来讨论这个问题。我们首先讨论非周期运动粒子的辐射谱（连续谱），然后讨论周期运动的粒子的辐射谱（分立谱）。

按照前面的讨论，在某个时刻 t 粒子辐射功率的角分布为：

$$\frac{dP(t)}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\text{ret}}^2 \equiv |\mathbf{A}(t)|^2, \quad (8.32)$$

其中为了方便起见，我们将上式的右边记为： $|\mathbf{A}(t)|^2$ 。我们还使用了探测者的时间 t （而不是运动粒子本身的时间 t' ），因为对于辐射频谱的分析，一般都是按照探测者的时间来度量的。于是在单位立体角 $d\Omega$ 中所辐射的总能量可以表达为：

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt. \quad (8.33)$$

这个能量也可以利用矢量场 $\mathbf{A}(t)$ 的傅里叶变换 $\mathbf{A}(\omega)$ 来表达，两者之间的关系为：

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt, \\ \mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (8.34)$$

利用 $\mathbf{A}(\omega)$ 我们可以将辐射能量的角分布写为：

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.35)$$

通常我们总是假设频率为正的，因此我们可以将上式进一步写为

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega, \quad (8.36)$$

其中的频率角分布为：

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2 = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2, \quad (8.37)$$

其中第二步我们利用了 $\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}(-\omega)^*$ ，因为 $\mathbf{A}(t)$ 为一个实矢量场。将矢量场 $\mathbf{A}(t)$ 的具体形式代入，我们得到：

$$\mathbf{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\text{ret}} dt. \quad (8.38)$$

现在我们可以利用光锥条件 $t' + R(t')/c = t$ 将积分变量换为 t' , 结果为:

$$\mathbf{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} dt'. \quad (8.39)$$

我们现在假定辐射粒子的运动局限在坐标原点附近, 而观测点距离辐射粒子非常遥远。在这种情形下, 单位矢量 \mathbf{n} 可以视为常矢量, 并且我们有: $R(t') \simeq |\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')$, 其中 $\mathbf{r}(t')$ 是粒子相对于原点的轨迹方程。于是, 除去一个常数相因子, 我们可以将 $\mathbf{A}(\omega)$ 重新表达为:

$$\mathbf{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2} dt, \quad (8.40)$$

其中我们已经将积分变量重新记为 t 。因此, 我们可以得到粒子辐射能量的频谱为:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2, \quad (8.41)$$

我们看到, 只要粒子的轨迹方程 $\mathbf{r}(t)$ 已知, 我们就可以计算出 $\boldsymbol{\beta}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$ 从而得到粒子辐射的频谱角分布。

上面给出的粒子辐射频谱公式的另外一个写法是注意到:

$$\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t))}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right]. \quad (8.42)$$

将这个关系代入并进行一次分布积分后得到:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t))] e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2. \quad (8.43)$$

这里顺便指出, 虽然我们的讨论中没有区分不同偏振的贡献, 但是粒子辐射的电磁波的偏振方向完全由公式 (8.43) 中被积函数中的矢量因子部分给出。因此, 只要将该矢量因子与某个特定的偏振矢量取内积然后再积分取模方, 我们就可以得到具有特定偏振的辐射的贡献。

¶ 如果粒子运动具有完全的周期性, 那么它辐射的电磁波的频谱是分立谱, 即粒子辐射的电磁波的频率都是其周期性运动频率 ω_0 (称为基频) 的整数倍。这时, 我们前面的讨论需要稍微做些修改。辐射功率的角分布仍然由公式 (8.32) 给出。这时矢量场 $\mathbf{A}(t)$ 也是时间的周期函数。因此它的展开不再是傅里叶积分而应当是傅里叶级数:

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{-in\omega_0 t}, \quad \mathbf{A}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{A}(t) e^{in\omega_0 t} dt, \quad (8.44)$$

其中 $T = 2\pi/\omega_0$ 为粒子运动的周期。这时我们感兴趣的是粒子辐射到单位立体角内的平均功率:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\mathbf{A}(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}_n|^2 = |\mathbf{A}_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{A}_n|^2, \quad (8.45)$$

其中我们已经运用了实矢量场所满足的性质： $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{-n}^*$ 。因此我们可以讨论其中的第 n 个倍频的平均功率角分布：

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = 2|\mathbf{A}_n|^2. \quad (8.46)$$

相应于公式 (8.43) 我们会得到：

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c T^2} \left| \int_{-T/2}^{T/2} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t))] e^{in\omega_0(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2. \quad (8.47)$$

这就是周期运动的粒子辐射的分立谱表达式。这个表达式实际上还可以这样得到：对于一个圆周运动的粒子（设半径为 a ），我们可以将相应的 $d^2I/(d\omega d\Omega)$ 的表达式（其积分限定于一个周期之内）乘以粒子运动的基本频率 $\nu/(2\pi a)$ （将能量转换为功率），再乘以相邻频率的间隔（即基频 $\omega_0 = \nu/a$ ）。这样就得到了辐射到第 n 倍频的立体角功率：

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{v^2}{2\pi a^2} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0}. \quad (8.48)$$

结合公式 (8.43) 大家可以验证，这个表达式与前面的公式 (8.47) 是完全一致的。这些公式我们将在下面讨论同步辐射的定量理论时用到。

40 同步辐射的频谱

¶ 一个相对论性的带电粒子做周期性圆周运动的辐射值得更为仔细地加以研究。这类辐射又被称为 **同步辐射**（synchrotron radiation），因为它对于 **同步辐射加速器** 的设计至关重要。我们第 38 节中已经初步讨论了这种辐射的功率角分布。本节中我们将对它的频谱特性做进一步的讨论。同步辐射的一个重要特性就是它具有十分宽广的频谱，这使得它不仅对于粒子物理实验是重要的，同时还可以被运用到物理学以及其他科学的研究中，甚至还可以被运用于医疗等重要应用领域。我们将首先进行一个定性的讨论，然后简单进行定量的讨论。

¶ 考虑一个做相对论性匀速圆周运动的带电粒子，其辐射功率的角分布由第 38 节中的公式 (8.29) 给出。这个公式告诉我们，在极端相对论的情形下，粒子的辐射主要集中在很狭小的一个角度之内。简单的估计发现，辐射集中的区域为： $\theta \simeq 0$ ， $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$ 。现在让我们考虑与粒子的圆周轨道同平面内远处的一个观测者所探测到的粒子的辐射。由于带电粒子的辐射仅仅局限于很小的一个角度内，同时粒子的运动方向快速地周期性变化，这就使得观测者探测到的辐射一定是周期性的脉冲信号。具体来说，只有当粒子的速度方向正好指向探测者的那个瞬间附近所辐射出的电磁波—由于辐射极强的方向性—才有可能被观测者探测到。能够被探测到辐射的这段时间内，粒子在圆周上仅仅行进了很短的一个距离： $d = a\Delta\theta \sim a/\gamma$ ，其相应的时间间隔为： $\Delta t \sim a/(\gamma v)$ 。在这段时间间隔内，粒子所辐射的电磁波的波前行进的距离为： $D = c\Delta t \sim a/(\gamma\beta)$ 。因此，这段时间内粒子所辐射的脉冲的波前和波尾之间在空间的间隔为： $L = D - d \sim (a/\gamma)(1/\beta - 1) \sim a/\gamma^3$ 。

换句话说, 对于观测者而言, 它探测到粒子辐射的电磁脉冲在时间上持续的时间约为: $L/c \sim (a/c)\gamma^{-3}$, 其中 (a/c) 就是粒子圆周运动的基本周期。我们看到, 脉冲持续的时间比粒子回旋的基本周期要缩短一个因子 γ^{-3} 。傅里叶变换的基本性质告诉我们, 这样的周期性脉冲的频谱的展宽与基本频率的比一定是这个因子的倒数, 即探测到的电磁脉冲的频谱展宽可以一直延伸到所谓的临界频率:

$$\omega_c \sim \omega_0 \gamma^3, \quad (8.49)$$

其中 ω_0 为回旋粒子的基本频率。由于对极端相对论性的粒子而言 γ 因子可以非常地大, 因此同步辐射的频谱一般来说非常宽广。这就是我们在本节开始所提到的同步辐射频谱的最基本特性。

¶ 要定量地讨论同步辐射的频谱, 我们可以从前面得到的基本公式 (8.47) 出发。我们假定带电粒子做圆频率为 ω_0 、半径为 a 的匀速圆周运动。为了方便起见, 我们将其运动的平面取为 xy 平面并取其圆轨道的圆心为坐标原点。于是, 带电粒子的运动轨迹可以由 $\mathbf{r}(t) = a(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0)$ 给出。带电粒子的速度则为: $\boldsymbol{\beta}(t) = \beta(-\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t, 0)$, 其中 $\beta = (\omega_0 a/c)$ 。由于问题的对称性, 我们可以不失一般性地将辐射方向 \mathbf{n} 取在 xz 平面内, 即 $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。于是我们可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} &= a \sin \theta \cos \omega_0 t, \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}] &= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \\ &= \beta(\cos^2 \theta \sin \omega_0 t, -\cos \omega_0 t, -\sin \theta \cos \theta \sin \omega_0 t) \end{aligned}$$

于是利用公式 (8.47) 并将积分变量换为 $\phi = \omega_0 t$ 我们得到

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}(t))] e^{in\phi - in\beta \sin \theta \cos \phi} d\phi \right|^2.$$

这里涉及到下列贝塞尔函数的定积分:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\phi - z \cos \phi)} \sin \phi d\phi &= -\frac{1}{z} J_n(nz), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\phi - z \cos \phi)} \cos \phi d\phi &= iJ'_n(nz). \end{aligned} \quad (8.50)$$

利用这些公式完成积分后辐射功率的公式化为:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \left| -\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_n(n\beta \sin \theta) \mathbf{e}_1 - i\beta J'_n(n\beta \sin \theta) \mathbf{e}_2 + \cos \theta J_n(n\beta \sin \theta) \mathbf{e}_3 \right|^2. \quad (8.51)$$

这个公式中模方中的矢量方向其实就反映了同步辐射的偏振方向。由于各个分量之比并不是实数 (其中第二项前面的虚数单位), 我们发现同步辐射一般来说是椭圆偏振的。将上式的模方化简我们就得到了最终的辐射功率角分布谱:

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c} [\cot^2 \theta J_n^2(n\beta \sin \theta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta \sin \theta)]. \quad (8.52)$$

这个公式又被称为 **肖特公式**，是肖特 (G.A. Schott) 在 1912 年首先得到的。

同步辐射具有极强的角度依赖，这一点对于极端相对论性的粒子更是如此。可以证明主要的辐射都集中在粒子运动的平面内 (即 $\theta \simeq \pi/2$ 附近) 很小的一个角度范围之中： $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$ 。原则上将肖特公式对立体角积分就可以得到总的辐射功率按照不同频率的分布。只不过角度的积分有些繁琐。利用贝塞尔函数的一些关系，可以将其表达为：

$$P_n = \frac{2e^2\omega_0^2}{v} \left[n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi \right] \quad (8.53)$$

我们将仅仅考虑极端相对论性的情形。这时上式的辐射其主要作用的模式为： $n \gg 1$ 。我们可以利用贝塞尔函数的渐近展开公式：

$$J_{2n}(2n\xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \Phi(n^{1/3}(1-\xi^2)), \quad (8.54)$$

其中的 $\Phi(t)$ 是所谓的 Airy 函数。⁵ 这样一来，我们可以将辐射功率写为：

$$P_n = -\frac{2e^2\omega_0^2 n^{1/3}}{\sqrt{\pi}c} \left[\Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(u) du \right], \quad (8.55)$$

其中 $u \equiv n^{2/3}\gamma^{-2}$ 。

我们将区分两种不同的情形： $1 \ll n \ll \gamma$ 以及 $n \gg \gamma$ 。对于前一种情形，我们可以在公式 (8.55) 中令 $u \rightarrow 0$ 后得到：

$$P_n = 0.52 \frac{e^2\omega_0^2}{c} n^{1/3}. \quad (8.56)$$

对于后一种情形，我们需要令 $u \rightarrow \infty$ 并且利用 Airy 函数的渐近展开式得到：

$$P_n = \frac{e^2\omega_0^2}{2\sqrt{\pi}c} \left(\frac{n}{\gamma} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{2}{3} n\gamma^{-3} \right] \quad (8.57)$$

上述两种情形的公式表明辐射同步辐射的频谱随着 $n^{1/3}$ 增加，大约在 $n \sim \gamma^3$ 的位置取极大值，然后随着 n 指数减小。正如我们前面提到的，由于对极端相对论性粒子来说 γ 很大，这导致同步辐射具有非常宽的频谱分布，这一点与我们前面的定性分析 (8.49) 完全一致。

¶ 同步辐射发现和发展的历史还是很有意思的。第一位非常系统地研究同步辐射的人就是英国数学家肖特 (G.A. Schott, 1912)，只不过他研究的背景与现在所谓的同步辐射不同。他当时研究的是在原子尺度的电子绕原子核时发出的辐射。⁶ 后来由于量子力学的诞生，肖特研究的背景似乎已经完全过时了。虽然他几乎推导出了所有关于同步辐射的重要公式，他的工作基本上还是被遗忘了三十几年。在 1943 年，前苏联的物理学

⁵ Airy 函数的标准定义为： $\Phi(t) = 1/\sqrt{\pi} \int_0^\infty d\xi \cos(\xi^3/3 - \xi t)$ 。它也可以用贝塞尔函数表达出来： $\Phi(t) = \sqrt{t/3\pi} K_{1/3}(2t^{2/3}/3)$ 。

⁶ 考虑到同时代氢原子的波尔模型，这个研究在当时的目的是很明确的。

家 D. Ivanenko 和 I. Pomeranchuk 再次研究了同步辐射并且预言了这类辐射的特性。直到 1947 年的五月，三位美国物理学家 (F. Elder, A. Gurewitsch, R. Langmuir) 才在通用电气公司的加速器上观察到同步辐射现象。目前同步辐射已经成为最为可靠且性能优良的人工 X-射线源并被应用到科学技术的各个领域。由于其重要的科学意义，各个国家也纷纷发展同步辐射光源。我国在此领域的重大装置是所谓的“上海光源”(Shanghai Synchrotron Radiation facility, SSRF)。有兴趣的同学可搜索其主页及相关介绍。

41 切伦可夫辐射

前面几节中我们简要地讨论了一个加速的带电粒子在真空中的辐射。在这一节中，我们介绍一下高速带电粒子穿过介质时出现的一种特殊的辐射——切伦可夫辐射。

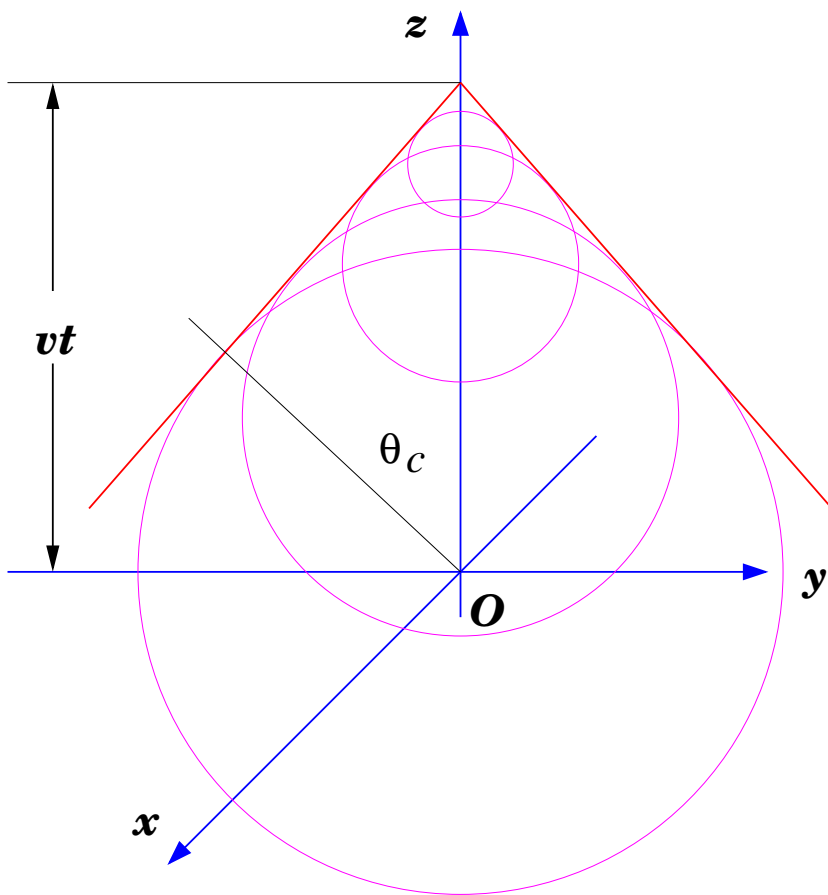


图 8.4: 切伦可夫辐射的示意图。运动粒子的速度沿正 z 方向，并且其速率 $v > c/\sqrt{\epsilon}$ ，这时由两者之比构成了所谓的切伦可夫锥体中顶角的正弦。锥体外的矢势为零，锥体内的矢势可以由公式 (8.64) 给出。

如果一个高速带电粒子不是在真空中，而是在介质之中运动，那么它所产生的标势和

矢势所满足的方程是:

$$\nabla^2\Phi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \quad (8.58)$$

我们利用傅立叶变换来求解这个方程。如果我们定义标势 Φ 的傅立叶变换为:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \Phi(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

以及类似的 \mathbf{A} 的傅立叶变换表达式, 那么电磁势的傅立叶分量满足:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(\mathbf{k}, \omega), \quad \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega). \quad (8.59)$$

对于一个在介质中匀速运动的粒子, 它的电荷密度与电流密度可以写成:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{x}, t).$$

它的傅立叶变换可以直接得到:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e\mathbf{v}\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}), \quad (8.60)$$

将此式代入公式 (8.59) 我们立刻得到:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{8\pi e\beta}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). \quad (8.61)$$

于是, 我们可以得到介质中一个匀速运动的电荷所产生的空间矢势分布为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 4\pi e\beta \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_3(x_3-vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp}}{k_3^2(1 - \beta^2\epsilon(k_3v)) + \mathbf{k}_\perp^2}, \quad (8.62)$$

其中为了方便, 我们已经假定带电粒子匀速运动的方向为 z 轴的正方向, 参见图 8.4。需要注意的是, 如果我们的介质的介电常数明显地依赖于频率, 那么上式并不能十分简洁地进行化简。但是, 如果我们近似地将 ϵ 看成常数, 这个积分可以积出来。我们发现, 如果粒子的速度极高, 高到比这种介质中的光速都大, 即: $\beta\sqrt{\epsilon} > 1$, 那么上式中的被积函数会有奇点。类似于我们前面的讨论, 这时我们必须将实轴上的奇点稍稍向下移动 (参见图 8.1 处的讨论)。于是, 对于空间满足 $x_3 - vt > 0$ 的点, 我们可以将对于 k_3 的积分围道从上半平面围合, 积分的结果等于零。

以粒子的运动轨迹为轴我们可以构造一个锥体 (参见图 8.4), 这个锥体的轴正好是粒子运动的方向; 锥体的顶点就是粒子所在的位置, 而它所辐射的电磁波的波矢方向与粒子运动方向的夹角为:

$$\theta_C = \cos^{-1} \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}, \quad (8.63)$$

由于粒子的速度高于介质中的光速 $c/\sqrt{\epsilon}$ ，因此上式有一个实数解。这个锥体就被称为切伦可夫锥。事实上可以证明，电磁势对于切伦可夫锥外部的所有点都等于零。对于锥体内部，通过具体的计算我们得到：⁷

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{2e\beta}{\sqrt{(x_3 - vt)^2 - (\beta^2\epsilon - 1)\mathbf{x}_\perp^2}}. \quad (8.64)$$

粒子的这种辐射被称为切伦可夫辐射。切伦可夫辐射是一种典型的激波辐射。事实上，它的行为（例如会形成激波锥体等）相当类似于空气中超声速时产生的激波。切伦可夫辐射在粒子探测器中有着广泛的应用，它多数情形下被用来确定粒子的速度。因为一旦形成切伦可夫辐射，它出射的角度与粒子的速度有着十分简单的关系，是粒子探测器中不错的速度选择装置。

42 辐射阻尼

¶ 通过前面几节的讨论我们已经看到，只要带电粒子做变速运动，它就会辐射电磁波。由于电磁辐射的存在，带电粒子会损失能量和动量，尽管它可能同时还从外加电磁场中获得能量和动量。到目前为止，我们并没有考虑带电粒子的辐射对于带电粒子本身运动的影响。也就是说，在讨论一个带电粒子在电磁场中的运动时，我们仅仅考虑了它在外加电磁场中的运动，没有考虑带电粒子的辐射场对带电粒子的影响（自作用）。带电粒子由于自身的辐射对自身运动的影响就被称为辐射阻尼。这一节中，我们就将简要地讨论这个在经典电动力学范畴中实际上不可能完美解决的问题。

42.1 Abraham-Lorentz 方程与辐射阻尼力

¶ 首先对辐射阻尼发生的时间尺度做一个半定量的估计是必要的。为此我们考虑一个非相对论性的带电粒子的运动，它对外的辐射功率由第 37 节中的拉摩公式 (8.19) 给出。现在考虑一个特征的时间尺度 τ ，由于带电粒子做加速运动，因此在这个时间尺度内它获得的动能的大小约为： $\Delta E_K \sim m(a\tau)^2$ ，其中 a 为该带电粒子的加速度。同样在这个时间尺度内带电粒子辐射掉的能量就是拉摩功率乘以时间 τ 。因此，如果粒子通过外场获得的动能与它辐射的能量相当，辐射阻尼的效应就必须考虑。因此我们得到：

$$m(a\tau)^2 \sim \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \tau,$$

⁷公式 (8.64) 只是切伦可夫辐射的一个近似描述。事实上如果我们用它计算磁场，我们会发现它在切伦可夫锥面上具有 δ -函数的发散。这个发散实际上是由于我们假定 ϵ 是常数造成的。考虑到 ϵ 的频率依赖就可以抹平这个发散。

于是我们发现这个特征的时间尺度为：

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}. \quad (8.65)$$

显然，如果我们考虑的问题的时间尺度 $T \gg \tau$ ，那么带电粒子从外场获得的能量将远大于辐射掉的能量，因此这时我们可以完全忽略掉辐射阻尼的效应。也就是说，只有使得带电粒子加速的外场的特征时间尺度接近或者小于 τ 的时候，我们才需要考虑被加速带电粒子的辐射阻尼效应。

按照上面辐射阻尼特征时间的表达式，我们通常遇到的粒子中电子具有最长的特征时间。如果我们将电子的质量和电荷带入，我们发现电子的特征时间为 $\tau \sim 6.26 \times 10^{-24}\text{s}$ ；与此相应的特征尺度为（即将特征时间乘以光速）： 10^{-13}cm ，这大概就是原子核的尺度（也就是电子的经典半径的尺度）。

¶ 上面关于能量的定性分析可以进一步给出辐射阻尼力的表达式。为此我们将带电粒子的运动方程写为：

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}}, \quad (8.66)$$

其中 \mathbf{F}_{ext} 和 \mathbf{F}_{rad} 分别是由于外电磁场和辐射阻尼所产生的力。我们要求辐射阻尼力在某个时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内对粒子做的功正好等于粒子辐射出去的能量：

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt, \quad (8.67)$$

其中我们运用了辐射功率的拉摩公式 (8.19)。将上式分部积分我们发现可以做如下的选择：

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}. \quad (8.68)$$

这就是我们得到的 **辐射阻尼力** 的表达式。因此，考虑到辐射阻尼力的情况下，一个带电粒子在外场中的运动方程可以表达为：

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (8.69)$$

这个十分古怪的经典运动方程一般被称为 **亚伯拉罕 — 洛仑兹方程**。方程中明显地包含了粒子的加加速度 $\ddot{\mathbf{v}}$ ，而这一点在牛顿力学的框架中是不许可的。一个具体的体现就是，这个方程一般存在着所谓的 **发散解**（runaway solutions）大家可以很容易验证，即使对于无外力的情形，方程仍然存在着随着时间指数增加的解，它们一般被称为发散解。⁸ 当然，历史上存在着处理掉这些发散解的尝试，但是这将使得运动方程十分复杂。我们这里采取的方法就是将非物理的发散解直接扔掉，因为这里整个的讨论仅仅在辐射阻尼是一个小修正的情形下才是有意义的。

⁸这些发散解的引入实际上说明积分形式的方程 (8.67) 与微分形式的方程 (8.68) 并不严格等价。我们中间曾经进行分部积分。可以验明，对于发散解来说，分部积分中边界上的项不是可以扔掉的。

¶ 上面对于辐射阻尼的讨论可以用于处理一个带电粒子对于电磁波的散射与吸收的问题。

例题 8.2 受辐射阻尼影响的带电受迫振子 考虑一个质量为 m 、电量为 e 固有频率为 ω_0 的带电振子。它处在频率为 ω 的电磁波的辐射场中并做受迫振动。振子具有阻尼系数 Γ' ，同时我们还需要考虑振子的辐射阻尼效应。我们来讨论带电振子的辐射（同时也是振子对于电磁波的散射）问题。

解： 在电磁波的影响下，考虑了辐射阻尼的带电振子的运动方程为：

$$\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma' \dot{\mathbf{x}} - \tau \dddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{e}_0 E_0 e^{-i\omega t}, \quad (8.70)$$

其中 Γ' 表示了振子的一般阻尼效应，与 $\dddot{\mathbf{x}}$ 成正比的项表示了辐射阻尼的影响。 \mathbf{e}_0 是入射电磁波的偏振方向。这个方程的一个特解是：

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_t(\omega)} \mathbf{e}_0, \quad \Gamma_t(\omega) = \Gamma' + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Gamma, \quad (8.71)$$

其中 $\Gamma \equiv \omega_0^2 \tau$ 是辐射阻尼造成的振子宽度， $\Gamma_t(\omega)$ 则被称为振子的总宽度。

我们可以计算振子由于加速而辐射的功率角分布，将其除以入射的电磁波的能量流就得到了振子对于电磁波的微分散射截面。这个计算与我们前面汤姆孙散射的计算十分类似（参见第 37 节），我们这里就直接写出结果：

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e})}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2 \left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2} \right]. \quad (8.72)$$

这个公式中方括号前面的表达式就是我们前面已经得到过的汤姆孙散射截面（参见公式 (8.22)）。对于极低频的电磁波，方括号贡献的因子正比于 ω^4 ，因此我们又得到了典型的 **偶极散射**（或者说 **瑞利散射**）的行为。如果总的振子宽度 $\Gamma_t(\omega)$ 是小的，那么我们发

现当电磁波的频率 ω 十分接近振子的固有频率 ω_0 的时候，系统会出现强烈的 **共振散射**。

我们同时看到，振子的总的宽度由两部分组成，一个是振子本身的阻尼力 Γ' ，另一个就是辐射阻尼力 $\Gamma = \omega_0^2 \tau$ 。即使振子原先不存在任何阻尼（ $\Gamma' = 0$ ），由于存在辐射阻尼，振子的谱线也会出现自然展宽。如果令 Γ 也趋于零，也就是忽略辐射阻尼的情形，振子辐射的频谱会变为频率空间的一个 δ -函数。

搞定

42.2 Abraham-Lorentz 模型与电子自能

¶ 前面的讨论已经提到，辐射阻尼力可以通过粒子和场总系统的能量守恒来加以确定。事实上，我们可以要求带电粒子和场的总系统的总的能量、动量守恒来讨论辐射场对于带电粒子的反作用问题。这正是当年亚伯拉罕和洛仑兹当年的出发点。亚伯拉罕和洛仑兹假设，带电粒子的动量实际上在本质上是电磁的。也就是说，它的动量实际上就是它所

产生的电磁场的动量。现在考虑这样的—一个带电粒子在一个外加电磁场之中的运动。这就是所谓的亚伯拉罕—洛仑兹模型。

我们试图从系统总的动量守恒出发：

$$\int d^3\mathbf{x} \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) = 0, \quad (8.73)$$

来导出带电粒子与自身电磁场的相互作用方程。这里的电磁场既包含了外加的电磁场，同时也包含了带电粒子自身所产生的电磁场：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{self}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{self}},$$

而如果我们要求带电粒子的运动方程保持通常的牛顿力学的形式： $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ ，我们得到：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \int d^3x \left(\rho \mathbf{E}_{\text{self}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{self}} \right), \quad (8.74)$$

其中 ρ , \mathbf{J} 表示该带电粒子的电荷密度和电流密度分布。

要进一步计算我们必须对带电粒子的结构做出一些假定。我们将假定带电粒子的电荷分布仅仅存在于一个尺度为 a 的一个范围内并且是球对称的；我们还假定带电粒子是刚性的，因此它的电流密度为： $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(t)$ ；第三，为了简化讨论，我们假定选择一个合适的参照系使得带电粒子瞬间在其中静止。运用这些假定，我们得到：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \left[\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right], \quad (8.75)$$

其中的电磁势： $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ 由下式给出：

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x}' \frac{[J^\mu(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}}}{R}, \quad (8.76)$$

这里： $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$, $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $R = |\mathbf{R}|$ 。注意，按照推迟势的公式，上式右边的时间 t' 应当在提前的时间来计算，即： $t - t' = R/c$ ，但是由于我们所考虑的尺度都在带电粒子电荷分布的尺度 a 之内，因此这个推迟的效应十分小。我们可以将它按照不推迟的时间来泰勒展开：

$$[J^\mu(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \left(\frac{R}{c} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [J^\mu(\mathbf{x}', t)]. \quad (8.77)$$

于是我们就得到：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!c^n} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\rho(\mathbf{x}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right] \quad (8.78)$$

现在让我们逐项来考虑上面这个展开式右边括号内与 ρ 有关的项。 $n = 0$ 的项给出的贡献正比于：

$$\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}', t) \nabla \left(\frac{1}{R} \right),$$

这恰好是带电粒子的自相互作用力。容易发现，如果我们采用球对称的电荷分布，那么按照对称性它恒等于零。 $n = 1$ 的项的贡献也为零。因此我们可以将与 ρ 有关的求和重新标记，然后和与 \mathbf{J} 有关的项结合起来。利用刚性条件、电荷守恒的连续方程、分部积分等技巧，我们可以将最终的结果表达为：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1}\mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \rho(\mathbf{x}', t). \quad (8.79)$$

这就是著名的亚伯拉罕—洛仑兹电子模型所导出的电子的运动方程。下面我们来分析这个展开式中各个项的物理含义。

公式 (8.79) 中 $n = 0$ 的项给出的贡献是：

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{n=0} = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{R} = \frac{4U_{\text{self}}}{3c^2} \dot{\mathbf{v}}. \quad (8.80)$$

其中的 $U_{\text{self}}^{(e.m.)} = (1/2) \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')/R$ 是带电粒子自身的静电能，简称为带电粒子的自能。我们看到，自能的贡献正比于粒子的加速度。因此我们可以定义带电粒子的电磁质量：

$$m^{(e.m.)} \equiv \frac{U^{(e.m.)}}{c^2}. \quad (8.81)$$

显然这个定义与爱因斯坦的质能关系是相容的。公式 (8.79) 中 $n = 1$ 的项恰好给出我们前面的辐射阻尼力的表达式：

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{n=1} = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (8.82)$$

容易证明，展开式中的更高阶的贡献在带电粒子的尺度 $a \rightarrow 0$ 时会趋于零。因此，对于一个尺度很小的带电粒子，如果仅仅考虑这两个贡献，带电粒子的运动方程可以写为：

$$\frac{4}{3} m^{(e.m.)} \dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (8.83)$$

这个方程与前面得到的亚伯拉罕—洛仑兹方程 (8.69) 形式上一致，唯一的问题是粒子的质量被换成了 $(4/3)m^{(e.m.)}$ 。⁹

¶ 亚伯拉罕—洛仑兹模型存在着一系列奇怪的问题。首先，方程 (8.83) 中的电磁质量之前有一个奇怪的系数 $4/3$ 。当然，这并不是严重的问题。这个不正确的因子实际上是由于我们用了非协变的运动方程来讨论的。更细致的相对论性的讨论可以给出正确的系数（也就是 1）。我们也可以假定带电粒子有一部分质量是非电磁的，它与电磁质量相加正好等于粒子的真实质量。但是更为严重的问题是，如果我们希望略去方程 (8.79) 中的高阶项，我们必须取所谓的点粒子极限： $a \rightarrow 0$ 。然而，恰恰在这个极限下，带电粒子自相互作用的电磁能 $U^{(e.m.)} \sim e^2/a$ 会按照 $(1/a)$ 的线性发散。这个问题在经典电动力学的框架之内是无法克服的。

⁹这顺便解释了为何最初 J.J. Thomson 猜测质能关系为： $E = (3/4)mc^2$ 。

反之，如果我们要求带电粒子的质量就是我们在实验上所测到的量级（还有什么比这个更自然吗？），亚伯拉罕—洛仑兹模型实际上要求该带电粒子的电荷分布一定要保持一个非零的尺度。这个尺度实际上大概是：

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (8.84)$$

对于电子来说，这个尺度被称为电子的 **经典半径**，其数值大约是 10^{-13}cm 。它实际上是一道坎儿，我们所热爱的（或者痛恨的）经典电动力学一般来说只有在这个尺度以上才是适用的。在这个尺度以下，我们必须运用相应的量子理论来取代经典电动力学。对于电子来说（实际上还有它的反粒子—正电子），这个理论就是所谓的 **量子电动力学**。在量子电动力学的框架中，电子的自能仍然是表观发散的，只不过不再是 $(1/a)$ 的线性发散，而是对数发散的。只有在经过了适当的 **重整化** 之后，电子的自能发散问题才能够得到根本的解决。



相关的阅读

本章对于带电粒子的辐射给出了一个初步的介绍。这一章显得十分的简略，这对于专门从事加速器研究的同学显然是十分不足的。但是考虑到多数同学并不会对此更为深入地研究，我想这个简介也就可以了。

附录 A 矢量与张量分析

在这个附录中，我们简要总结一下有关矢量、张量以及它们的微积分。我们在电动力学里面用到的主要是三维空间的矢量、张量以及四维闵氏空间的矢量、张量。我们称前者为 3-矢量、3-张量，或简称矢量、张量；称后者为 4-矢量、4-张量。

1 矢量与张量的定义

从数学上讲，一个 **矢量** \mathbf{A} 是 **矢量空间** 中的一个抽象的元素。在选取了正交归一的 **基矢** 以后，我们可以用它的分量 A_i 来代表它。电动力学里用到的三维空间矢量都具有三个分量，它对应的矢量空间是三维欧几里德空间。在这个三维空间中，基矢的选取是随意的。任意两组 **正交归一** 的基矢之间由一个 **正交变换** 联系着。我们将这个变换的矩阵记为 R_{ij} ，它满足：

$$R_{ij}R_{kj} = R_{ji}R_{jk} = \delta_{ik} . \quad (\text{A.1})$$

其中我们启用了所谓的 **爱因斯坦求和约定**，即：任何两个重复的指标暗示着对该指标对的求和。

一个矢量在基矢的变换下有着确定的变换规则。具体地说，如果在某个基矢下的矢量 \mathbf{A} 的分量为 A_i ，那么经过变换矩阵 R 变换后的矢量的分量 A'_i 由下式给出：

$$A'_i = R_{ij}A_j . \quad (\text{A.2})$$

这个式子可以作为矢量的定义。换句话说，在坐标变换下，满足上面这个变换规则的量被 **定义为** 矢量。

如果我们把两个矢量 \mathbf{A}_i 和 \mathbf{B}_j 乘起来，就可以构成一个称为 **并矢** 的东西。一个并矢具有两个指标：

$$D_{ij} = A_i B_j .$$

并矢的变换规则可以由每个矢量分别变换得到：

$$D'_{ij} = R_{ik}R_{jl}D_{kl} . \quad (\text{A.3})$$

显然，如果我们将两个不同的并矢相加，我们就可以得到一个变换规则与并矢一样，但本身并不一定是并矢的东东。这就是一个一般的二阶张量。具体的说，一个物理量 T_{ij} ，如果在坐标变换下满足下式：

$$T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl} \quad , \quad (A.4)$$

那么我们就称 T_{ij} 为二级张量。这个定义可以继续推广到 n -阶张量。它是一个具有 n 个指标的物理量，同时在坐标变换下，每一个指标都分别按照矢量指标变换。从这个意义上说，矢量也可以称为一阶张量，而标量可以称为零阶张量。

一个非常有用的三阶张量是所谓的全反对称三阶张量，或者称为 Levi-Civita 符号： ϵ_{ijk} 。利用它，我们可以定义两个矢量的矢量积，它有时又俗称为叉乘：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k \quad . \quad (A.5)$$

全反对称张量满足的一个重要的公式是：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad . \quad (A.6)$$

这个公式在化简矢量运算时常常会用到。

一个高阶张量，如果我们将其中的两个指标设为相同（并且求和），那么得到的将是一个比原先张量少两阶的一个张量。这个过程我们称为张量的缩并。具体地说：一个二阶张量缩并后变成一个标量；三阶张量缩并后变成一个矢量等等。

2 矢量与张量的微积分

如果在空间的任意一点 \mathbf{x} 都存在一个张量 $T_{ij\dots}(\mathbf{x})$ ，我们称张量 $T_{ij\dots}(\mathbf{x})$ 为一个张量场。在电动力学中，标势、电荷密度等都是标量场（零阶张量场）；电场、磁场、磁矢势等都是矢量场（一阶张量场）；麦克斯韦协强张量、电四极矩张量则是二阶张量场。

我们可以对张量场进行微分运算。基本的运算算符是偏微商算符，或者称为梯度算符 $\partial_i = \nabla_i$ 。例如，将它作用于一个标量场，我们就得到该标量场的梯度：

$$(\nabla\Phi(\mathbf{x}))_i = \partial_i\Phi(\mathbf{x}) \quad . \quad (A.7)$$

可以证明，一个标量场的梯度是一个矢量场；如果将偏微商算符作用于一个矢量场，我们一般会得到一个二阶张量场等等。偏微商算符的一个重要性质是：

$$\partial_i\mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad . \quad (A.8)$$

如果将偏微商算符作用于一个矢量场，并且将所得到的二级张量场的两个指标缩并，我们就得到了该矢量场的 **散度**，它是一个标量场：

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \partial_i \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.9})$$

如果将梯度算符与某个矢量场做叉乘，那么我们得到的仍然是一个矢量，它称为原来矢量场的 **旋度**：

$$[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \mathbf{A}_k(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.10})$$

张量场也可以在三维空间中进行各种积分运算。一个适当变换性质的张量（我们下面会说明什么是“适当”的）在空间中闭合区域上的积分是特别重要的。对于三维空间，这种闭合的区域只可能有两种：一维闭合回路或者闭合的二维曲面。对于闭合二维曲面上的积分有所谓的 **高斯定理**（公式），而对于一维闭合回路上的积分有所谓的斯托克斯公式。

高斯定理（公式）实际上是说，如果我们将梯度算符作用于任意一个张量场，并且将梯度算符与张量场中的任意一个指标缩并，然后将所得到的张量（少了两阶的）在某个空间区域 V 中做体积分；这个积分可以化为在该空间边界 ∂V 上的面积分：

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \partial_i T_{\dots, i, \dots}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} d\mathbf{S}_i T_{\dots, i, \dots}(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.11})$$

这个定理对于任意阶的张量场都成立，但是最为常见的情形是 $T_{\dots, i, \dots}(\mathbf{x})$ 本身是个矢量场，于是上式就是著名的 **散度定理**：

$$\int_V d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.12})$$

另外一个十分重要的定理是所谓的 **斯托克斯定理**。考虑空间一个闭合曲线 C 所围成的面 S ，那么我们可以用符号的形式写成：

$$\epsilon_{ijk} \int_S d\mathbf{S}_i \partial_j = \oint_C d\mathbf{l}_k . \quad (\text{A.13})$$

这个等式的两端积分号内可以放进任意的一个张量场。一个最常用的特例是放入一个矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ：

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.14})$$

大家熟悉的安培环路定理就是这个形式。

3 闵氏空间中的矢量与张量

在一般的洛伦兹变换下不变的量称为洛伦兹标量，如果不致引起混乱，有时也简称为标量。洛伦兹变换反映的是闵氏空间中的一个“转动”，它保持两个坐标的不变间隔不

变。对于无限接近的两个时空点（事件），它们之间的不变间隔的平方 ds^2 为：

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{A.15})$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵氏时空的度规张量。注意这时我们必须区分协变 4-矢量和逆变 4-矢量；前者具有一个上标而后者具有一个下标。度规张量的逆 $\eta^{\mu\nu}$ 满足：

$$\eta^{\mu\beta} \eta_{\beta\nu} = \delta_\nu^\mu . \quad (\text{A.16})$$

对于狭义相对论中的闵氏空间， $\eta^{\mu\nu}$ 的每一个分量实际上都与 $\eta_{\mu\nu}$ 相等。具体地说，我们有：

$$\eta_{00} = \eta^{00} = 1, \quad \eta_{ii} = \eta^{ii} = -1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.17})$$

其余分量皆为零。度规张量可以用来升高或降低指标，也就是将协变和逆变指标相互转换。例如：

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu . \quad (\text{A.18})$$

在洛伦兹变换下，逆变矢量的变换规则是：

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad A'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} A^\nu = \Lambda_\mu^\nu A_\nu, \quad (\text{A.19})$$

其中 $\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu$, $\Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\alpha \eta^{\alpha\nu}$ 。

将两个 4-矢量相乘，就可以构成一个具有两个指标的并矢。取决于原来的 4-矢量是协变的还是逆变的，我们可以构成两个协变指标的、一个协变一个逆变指标的或者两个逆变指标的并矢。不同的并矢线性组合起来就构成了一个一般的二阶张量。类似的，我们还可以构成更为高阶的张量，它可以具有任意多个协变指标和任意多个逆变指标。在洛伦兹变换下，一个张量的每一个指标都按照相应的 4-矢量的变换规则分别变换。

如果张量依赖于闵氏空间的时空点，我们就称之为一个张量场。一个标量场就是零阶张量场；矢量场是一个一阶（协变或逆变）张量场等等。我们可以定义一个四维梯度算符： ∂_μ ，它作用于一个张量场的规则是：

$$\partial_\mu T(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.20})$$

其中 $T(x)$ 可以是一个具有任意上标或下标的张量场。利用偏微商的锁链法则不难证明，梯度算符作用于一个张量场以后所得到的新的张量场比原先的张量场多一个协变指标。当然，利用度规张量 $\eta^{\mu\nu}$ 我们也可以得到具有一个上标的四维梯度算符：

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu . \quad (\text{A.21})$$

在四维时空中，也可以将张量进行积分。在四维时空中积分可以沿一维闭合回路、二维闭合曲面或者三维闭合超曲面来进行。一个闭合—维曲线上的线元可以用 dx^μ 来表示：

一个闭合二维曲面上的面元可以用曲面上两个线元 dx 和 dx' 所围成的平行四边形来表示。我们可以将它投影到四维时空的 $x^\mu - x^\nu$ 平面。于是，我们定义一个面元张量：

$$dS^{\mu\nu} = dx^\mu dx'^\nu - dx'^\mu dx^\nu . \quad (\text{A.22})$$

我们有时也用与 $dS^{\mu\nu}$ 对偶的面元 $d\tilde{S}^{\mu\nu}$ ：¹

$$d\tilde{S}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} . \quad (\text{A.23})$$

类似的，对于一个三维闭合超曲面，我们可以在它上面取三个 4-矢量： dx ， dx' 和 dx'' 。它们所围成的平行六面体的体积元为：

$$dV^{\mu\nu\alpha} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \\ dx^\alpha & dx'^\alpha & dx''^\alpha \end{vmatrix} . \quad (\text{A.24})$$

这个三维超曲面面积元（实际上是个体积元）构成了一个三阶反对称张量。²我们往往利用与 $dV^{\mu\nu\alpha}$ 对偶的一阶张量 $d\tilde{V}^\mu$ ：

$$d\tilde{V}^\mu = -\frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} dV_{\nu\alpha\beta} . \quad (\text{A.25})$$

¶ 下面我们叙述四维空间中的重要积分公式。首先，如果将任意一个张量 T 的某个指标与一个三维闭合曲面 V 上的对偶面积元 $d\tilde{V}$ 的指标缩并，并且在该闭合三维曲面上积分，那么这个积分可以化为梯度算符与该张量指标缩并并且在该三维闭合曲面所围成的四维空间 Ω 中进行体积分：

$$\oint_V d\tilde{V}_\mu T^{\dots\mu\dots} = \int_\Omega d^4x (\partial_\mu T^{\dots\mu\dots}) . \quad (\text{A.26})$$

这可以看成是散度定理的四维形式。如果我们将某个物理量在一个二维闭合曲面 S 上积分，它可以化为在该二维曲面所围成的三维空间 V 上的积分。这个替换的规则是：

$$\oint_S d\tilde{S}_{\mu\nu} = \int_V d\tilde{V}_\mu \partial_\nu - d\tilde{V}_\nu \partial_\mu . \quad (\text{A.27})$$

同样的，如果我们在一个闭合的一维曲线 C 上积分，它可以换成该曲线所围成的二维曲面 S 上的积分，替换规则是：

$$\oint_C dx^\mu = \int_S dS^{\nu\mu} \partial_\nu . \quad (\text{A.28})$$

所有这些积分公式都可以看成是微分几何中的普遍的斯托克斯定理的特例。³

¹在三维空间中，我们也可以定义 dx 和 dx' 所围成的二维面积元 $dS_{ij} = dx_i dx'_j - dx'_i dx_j$ ，只不过我们在三维空间的公式中，总是用与 dS_{ij} 对偶的面积元： $d\tilde{S}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} dS_{ij}$ 。它的大小等于矢量 dx 和 dx' 所围成的平行四边形的面积，而方向为两矢量所确定的法向。显然它就是两矢量 dx 和 dx' 的叉乘。

²如果用微分几何的语言来说，一个线元 dx^μ 被称为一个微分 1-form；而面积元 $dS^{\mu\nu}$ 被称为一个微分 2-form；体积元 $dV^{\mu\nu\alpha}$ 被称为一个微分 3-form。所有的微分 form 都是反对称的张量。一个 n -维空间中最高阶的微分 form 是 n -form。我们这里讨论的积分公式都是关于微分 form 的积分。

³微分几何中的普遍斯托克斯定理的表述为：给定一个 n -维可定向流形（orientable manifold） M ，如果 ω 是其上的一个 $(n-1)$ -form，那么一定有： $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ ，其中 ∂M 代表流形 M 的边界。

附录 B 分析力学提纲

这里我们简要回顾一下分析力学中的基本概念和基本方法。我们将仅仅列出分析力学中最为重要的结论，对于细致的讨论，大家必须参考专门的理论力学教科书 [9, 12]。

¶ 在分析力学中，一个多自由度的力学体系的状态由一组 **广义坐标** 描写，我们把它记为： (q_1, q_2, \dots, q_N) ，其中独立的广义坐标的个数 N 称为该力学体系的自由度数。有时为了简化记号，我们又将这一组广义坐标统一记为： q 。与力学体系的运动密切相关的是它的 **作用量** 和 **拉格朗日量**。一个力学体系的拉格朗日量 $L(q, \dot{q}, t)$ 一般是它的广义坐标、广义坐标的一阶时间微商和时间的函数。¹体系的作用量是它拉格朗日量对时间的积分：

$$S(q_i, t_i; q_f, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{B.1})$$

其中我们假定力学体系的两个端点，也就是在时刻 $t = t_i$ 时的广义坐标 q_i 以及时刻 $t = t_f$ 时的广义坐标 q_f 是给定的。力学体系在时刻 $t = t_i$ 和时刻 $t = t_f$ 之间的运动由该体系的 **运动方程** 所决定。一个力学体系的运动方程可以由著名的 **最小作用量原理** 得到。这个原理告诉我们：力学体系的真实（由运动方程所确定的）运动轨迹 $q(t)$ 一定使得该体系在两个固定端点之间的作用量取极小值。

运用变分法的方法，我们可以得到体系的运动方程。为此，我们考虑使得作用量取极小的轨迹 $q(t)$ 的一个微小的变分 $\delta q(t)$ 。由于我们必须固定端点，所以我们一定有： $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ 。由 δq 所造成的作用量的变化为：

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right] \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

¹如果系统的拉格朗日量中含有广义坐标的更高阶时间微商，这样的理论被称为高阶导数理论。这样的理论对于经典体系而言可以自洽地存在，但是如果考虑体系的量子化，高阶导数理论一般无法用正定的 Hilbert 空间来自洽地量子化。

要求上式等于零，同时由于 δq 的任意性，我们得到体系所满足的运动方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (\text{B.3})$$

这就是著名的 **欧拉—拉格朗日方程**。对应于每一个广义坐标 q_i ，我们定义与它共轭的 **广义动量** p_i ：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{B.4})$$

因此，一个力学体系的欧拉—拉格朗日方程也可以写成：

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (\text{B.5})$$

对于一个只包含动能和势能的系统，它的拉格朗日量可以取为其动能减去势能。这时，上面的运动方程显然与牛顿力学得到的完全一致。

显然，如果固定一个力学系统在初态和末态，那么系统的拉格朗日量加上一个任意函数的时间全微商不会影响系统的运动方程。因此，拉格朗日量本身并不是可以直接测量确定的物理量。这个性质我们在第 33 节中曾经用来得出电磁相互作用的规范不变性。

¶ 有了系统的拉格朗日量，它的 **哈密顿量** 也可以通过 **勒让德变换** 得到：

$$H(p, q, t) = \dot{q}_i p_i - L, \quad (\text{B.6})$$

其中等式右边必须利用广义动量与广义坐标的关系，化成 p 和 q 的函数而不是 \dot{q} 和 q 的函数。体系的哈密顿量体现了体系在时间平移时的特性。如果力学体系具有时间平移不变性，那么它的哈密顿量将是力学体系的一个守恒量（初积分），其数值就是体系的能量。体系的拉格朗日方程也可以等价地用 **哈密顿正则方程** 写出：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (\text{B.7})$$

¶ 一个力学体系的作用量 S 也可以看成是系统末态坐标和时间的函数，即 $S = S(q, t)$ 。这时系统在初始点与末态之间被认为遵从最小作用量所确定的经典路径（也就是运动方程所确定的路径）运动。按照公式 (B.2) 的推导，我们显然有：

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (\text{B.8})$$

另一方面，作为坐标与时间的函数，对于 $S(q, t)$ 我们有：

$$L = dS/dt = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i. \quad (\text{B.9})$$

利用公式 (B.8) 的结果, 我们发现: 作用量对于时间的偏微商正好是负的哈密顿量。于是, 我们可以写出这个力学系统的哈密顿—雅可比方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0, \quad (\text{B.10})$$

其中哈密顿量中的系统的动量 p_i 按照公式 (B.8) 应当表达成作用量对于坐标的偏微商。哈密顿—雅可比方程是关于作用量 $S(t, q)$ 的一个一阶偏微分方程, 它一般是非线性的。只要求解出哈密顿—雅可比方程, 系统的运动也就被完全确定了。

附录 C 电磁单位制

在这个附录中我们简要回顾一下不同电磁单位制之间的关系。在经典电磁问题中，通常使用的有两大类单位制。一类是大家所熟悉的国际单位制，另一类就是类高斯单位制，它又包括两个稍有区别的单位制：高斯单位制和海维赛德-洛仑兹单位制。

电磁规律并不依赖于你用什么单位制来表达它。因此，从原则上来说，任何一个自治的电磁单位制都是可以的。它们的区别仅仅在于是否方便，而这又依赖于你需要处理的问题。总的来说，在处理宏观电动力学问题和工程问题时，利用国际单位制可能比较方便一些；而在处理微观的电动力学问题时，往往类高斯制比较方便。下面我们简要说明国际制（SI）与高斯制（Gaussian）、海维赛德-洛仑兹制（Heaviside-Lorentz）之间的关系以及相互的转换方法。

真空中的麦克斯韦方程与单位制

一种电磁单位可以通过真空中电磁现象中的几个基本方程加以定制。下面我们将分别列出这些规律并加以说明。

首先是静电学中描写真空中两个点电荷之间相互作用力的库仑定律：

$$F = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{C.1})$$

其中 k_1 是一个（可能有量纲的）比例常数。由一个点电荷产生的电场可以定义为该电荷周围一个单位测试电荷所受到的力：

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (\text{C.2})$$

另一个用来确定单位的方程来源于稳恒电流所产生的磁场中电流所受的力。如果我们真空中有两个相距为 d ，电流分别为 I 和 I' 的无限长平行导电导线（其直径可以忽略），那么其中一个导线单位长度所感受到的，来自另一个导线的力为：

$$\frac{dF}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}. \quad (\text{C.3})$$

其中 k_2 是另一个（可以有量纲的）比例常数。磁场可以定义为单位电流所感受到的力，但是我们一般可以插入一个比例常数 α ：

$$B = 2k_2\alpha\frac{I}{d}. \quad (\text{C.4})$$

值得注意的一个重要事实是，比较公式 (C.1) 和公式 (C.3)，我们发现 k_1/k_2 一定具有速度平方的量纲。事实上，独立的实验验证了：

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2, \quad (\text{C.5})$$

其中 c 即为真空中的光速。

- 前面讨论的两个常数分别涉及电和磁，第三个用以确定电磁单位制的方程可以取为 **法拉第定律**，它涉及电与磁的相互感应：

• • • • •

$$\nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (\text{C.6})$$

- 最后我们注意到，在任何单位制中，电荷守恒定律的形式总是相同的：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{C.7})$$

上面列出的四个基本定律基本上就已经完全确立了一个单位制。我们可以写出这个普遍的单位制中的麦克斯韦方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_2 \alpha \mathbf{J} + \frac{k_2}{k_1} \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.8})$$

在这个方程组之中，第一个方程右边的系数来源于我们对于电场的定义 (C.2)；第二个方程的右边的系数来源于我们关于磁场的定义 (C.4) 以及电荷守恒的连续方程。现在如果我们考察真空中的上述麦克斯韦方程组，并且要求它给出真空中的波动方程（波速为 c ），那么我们立刻发现：

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2. \quad (\text{C.9})$$

与前面的实验结论 (C.5) 比较我们发现：

$$k_3 = \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{C.10})$$

- 对于一个任意的电磁单位制，只要给定： k_1 ， k_3 两个常数就可以完全确定该单位制中的各种电磁方程。

表 C.1: 三种不同电磁单位制, 即国际制、高斯制、海维赛德-洛仑兹制对于常数 k_1, k_2, k_3 的选取。我们同时列出了这些常数的量纲。

单位制	$k_1 [k_1]$	$k_2 [k_2]$	$k_3 = 1/\alpha [k_3]$
国际	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7} c^2 [ml^3t^{-4}I^{-2}]$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7} [mlt^{-2}I^{-2}]$	1 [1]
高斯	1 [1]	$\frac{1}{c^2} [l^{-2}t^2]$	$\frac{1}{c} [l^{-1}t]$
海维赛德-洛仑兹	$\frac{1}{4\pi} [1]$	$\frac{1}{4\pi c^2} [l^{-2}t^2]$	$\frac{1}{c} [l^{-1}t]$

另外需要指出的是, k_1, k_2 必须满足约束 (C.5)。读者也许会好奇, 为什么两个常数的比值恰好是真空中光速。这仅仅是一个巧合吗? 这个问题的答案在于相对论协变性。也就是说, 如果我们要求麦克斯韦的电磁理论具有狭义相对论所要求的协变性, 那么上述的约束就必须成立。如果我们回忆起麦克斯韦电磁理论的拉格朗日形式 (正如我们第七章所讨论的) 几乎可以完全通过相对论协变性建立起来, 那么大家对于这些所谓的“巧合”应当就不会觉得奇怪了。

在表 C.1 中我们列出了最为常用的三种电磁单位制对于不同的常数 k_1, k_2, k_3 的选取。同时列出的还有它们可能的量纲。这些量纲在国际单位制之中特别的复杂一些; 在高斯制或者海维赛德-洛仑兹单位制中, 这些常数要么是 1, 要么是光速的某个幂次, 因此其量纲是十分简单的。我们还发现, 如果我们进一步将光速 c 取为速度的单位, 那么常数 k_1, k_2 就变成相等的常数, 同时高斯制以及海维赛德-洛仑兹制中的所有常数都变成无量纲的常数。这就是为什么我们更加喜欢高斯制或者海维赛德-洛仑兹单位制。因为它们刻画电磁现象最基本的规律 (也就是麦克斯韦方程组) 的时候显得特别方便、简单。

¶ 不同单位制下介质中的麦克斯韦方程

前面的讨论仅仅涉及了真空中的场和方程。不同的电磁单位制中介质中的场 \mathbf{D}, \mathbf{H} 的定义也有所不同。假定介质的电磁性质可以简单地用极化矢量 \mathbf{P} 和磁化矢量 \mathbf{M} 来描写, 那么我们可以将宏观介质中的场统一写为:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M}, \quad (\text{C.11})$$

其中的 $\epsilon_0, \mu_0, \lambda, \lambda'$ 都是 (可能有量纲的) 比例常数。由于 \mathbf{D}, \mathbf{H} 是新定义的量, 我们完全没有必要将它的量纲取得与 \mathbf{P}, \mathbf{M} 不同, 因此在所有不太变态的单位制中,¹ 人们取 λ, λ' 为无量纲常数。但是, ϵ_0 和 μ_0 原则上是可以有量纲的。例如, 在大家所熟悉的国际制当中,² 对于这些常数的选择是:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \lambda = \lambda' = 1, \quad \text{SI} \quad (\text{C.12})$$

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1, \lambda = \lambda' = 4\pi, \quad \text{Gaussian} \quad (\text{C.13})$$

$$\epsilon_0 = \mu_0 = \lambda = \lambda' = 1, \quad \text{Heaviside-Lorentz} \quad (\text{C.14})$$

¹或许因为电磁单位制已经足够地变态了, 所以还是尽可能少变态一些吧。

²从这个角度讲, 国际制也是相当变态的。

特别注意的是，在国际制中 ϵ_0 和 μ_0 是有量纲的常数。它们的单位可以取为 F/m （法拉每米）和 H/m （亨利每米）。由于目前的长度单位是通过真空中光速和秒来定义的，因此真空中的光速是一个没有误差的、严格的物理量：

$$c = 299792458 \text{ m/s} . \quad (\text{C.15})$$

因此，常数 ϵ_0 和 μ_0 也是没有误差的物理常数。

¶ 关于安培的历史

在电磁国际制（SI）中，人们经常引入另一个“单独”的单位称为“安培”，而它的定义实际上是经历过一系列的变迁的。

在 1881 年第一次国际电学会议（First International Conference of Electricians）上，确立了关于伏特、安培、库仑、法拉的定义。这就确立了所谓的“绝对适用电学单位制”。所谓绝对，是说这些电学单位完全是由纯粹力学的量来定义的；所谓适用，是因为这些单位在实际的（当时主要是宏观的）电学应用中，比起以往的 cgs 制中的单位更为合理。因此，这个单位制中的伏特、安培、欧姆等等又被称为“绝对伏特”、“绝对安培”、“绝对欧姆”等等。

但是，1881 年定义的绝对适用单位制虽然“适用”，但并不“实用”。原因是定义那些新的电学量的实验往往仅仅能够在十分考究的实验室中来完成。因此，到 1893 年的第四次国际电学会议上，人们试图改变这一点。于是，就诞生了新的电流单位，称为“国际安培”。它的定义是通过在电解银的盐溶液时，单位时间从电极析出的银原子的质量来确定的。具体来说，如果一个恒定的电流加在硝酸银（silver nitrate）电解溶液上，每秒钟正好在电极上析出 0.001118000 克的银原子，那么这个电流就定义为 1 安培。基于类似的考虑，这次会议还重新给出了国际欧姆、国际伏特等单位的“更为实用”的新的定义。³ 但是，很快人们意识到这是一个糟糕的选择。因为随着实验的精度提升，人们发现关于国际安培、国际欧姆、国际伏特的定义并不自恰。1908 年，大家决定放弃国际伏特的单独定义，但国际安培和国际欧姆的定义得以保留。

到 1948 年，人们发现绝对的安培其实比起电解过程更为方便而且纯净，于是又回归到所谓的“绝对安培”的定义。它的定义是：如果真空中两个平行、等流量电流之间的作用力恰好是 $2 \times 10^{-7} N/m$ ，那么这两个导线中的电流就被定义为一个“绝对安培”。直到今天，国际上通用的电流单位就是“绝对安培”，它实际上比以前的国际安培要大大约万分之 1.5 左右。我们看到安培是通过公式 (C.3) 来定义的。比例系数 $k_2 = 10^{-7}$ 的数值已经完全确定了，但是它的量纲仍然是随意的。在国际制当中，通常的做法是，将公式

³例如，国际欧姆是用特定条件下（一定温度、压强等等），固定截面积下一个特定长度的水银柱的电阻来定义的；国际伏特则是利用一种特定的电池（称为 Clark cell，由水银、锌为两级、由硫酸锌、硫酸汞为溶液制成）在一定条件下的电压来定义的。

表 C.2: 国际制、高斯制之间常用电磁学物理量的转换。

物理量	国际制	高斯制
真空中光速	$(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$	c
电场强度 (标势、电压)	$\mathbf{E}(\Phi, V)$	$\mathbf{E}(\Phi, V)/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
电位移矢量	\mathbf{D}	$\sqrt{\epsilon_0/(4\pi)}\mathbf{D}$
电荷密度 (电流密度、电极化矢量等) ⁴	$\rho(\mathbf{J}, \mathbf{P})$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\rho$
磁感应强度	\mathbf{B}	$\sqrt{\mu_0/(4\pi)}\mathbf{B}$
磁场强度	\mathbf{H}	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$
磁化强度 ⁵	\mathbf{M}	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\mathbf{M}$
电导率	σ	$4\pi\epsilon_0\sigma$
电容率	ϵ	$\epsilon_0\epsilon$
磁导率	μ	$\mu_0\mu$
电容	C	$4\pi\epsilon_0C$
电感	L	$L/(4\pi\mu_0)$
电阻	R	$R/(4\pi\epsilon_0)$

右边的电流取为基本单位，实际上就是取绝对安培，这样一来， k_2 的量纲就是 $mlt^{-2}I^{-2}$ 。当然，我们也可以令 k_2 为无量纲的常数，这时电流看起来就是一个导出单位，其量纲为 $m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$ ，这样一来，所有的电磁学量都可以仅仅使用纯力学的量纲来描写，只不过很多都具有分数幂次，十分的不方便。因此，在国际制当中，我们通常保留绝对安培作为第四个基本量纲。与安培的地位比较起来，欧姆的命运要“悲惨”一些。由于欧姆定律并不是总成立的，因此关于绝对欧姆的定义往往无法做到十分满意。因此，现在往往将欧姆视为一个导出单位。通过以上的描述，我们大致了解了安培这个单位在国际制中的特殊性。

¶ 高斯制与国际制之间的转换

表 C.2 中我们列出了电磁学中常用的一些物理量在高斯制和国际制之间的转换规则。这些规则不难通过前面的讨论确立起来。这个转换表的用法是：首先写下国际制下的某个电磁学公式，然后将其中出现的电磁学物理量换成表中最后一列的表达式，这样所得到的公式就是在高斯制下的表达式了。例如，我们要转换国际制下的公式： $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ，按照表 C.2 的提示，它就是： $\sqrt{\epsilon_0/(4\pi)}\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ ，即： $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ 。这个式子虽然与原先形式相同，但是这个公式中的所有物理量应当按照高斯制中的物理量来理解。特别注意的是，高斯制中的 ϵ 是无量纲的相对电容率（介电常数），而原先国际制中的、形式完全相同的公式中的 ϵ 则是有量纲的电容率。

⁴这类物理量还包括：电荷 Q 、线电荷密度、面电荷密度、电偶极矩、电流强度 I 等等。

⁵这类物理量还包括磁矩。

参 考 书

- [1] 郭硕鸿, 《电动力学》(第二版), 高等教育出版社, 1997。
- [2] 俞允强, 《电动力学简明教程》, 北京大学出版社, 1999。
- [3] 蔡圣善、朱耘、徐建军, 《电动力学》(第二版), 高等教育出版社, 2002。
- [4] 虞福春、郑春开, 《电动力学》, 北京大学出版社, 2003。
- [5] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1975; 高等教育出版社, 2004。
- [6] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1975。
- [7] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, 1999; 世界图书出版公司, 2005。
- [8] W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1969。
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1994。
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Classical Field Theory*, Pergamon Press, 1994。
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd Ed., Pergamon Press, 1994。
- [12] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1980。
- [13] 吴崇试, 《数学物理方法》, 北京大学出版社, 1999。
- [14] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, 1950。
- [15] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 4th Ed. Pergamon Press, New York, 1970。
- [16] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd Ed. Springer-Verlag, New York, 1982。

- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd Ed. Cambridge University Press, 1992.
- [18] 《中国大百科全书》(物理卷), 中国大百科全书出版社。
- [19] J.L. Heilbron, *Elements of Early Modern Physics*, University of California Press, Berkeley, 1982.

总索引

- 4-波矢, 120
- 4-速度, 128
- HE_{11} 模式, 88
- 21 厘米谱线, 54

- Aharonov-Bohm 效应, 6

- Bianchi 恒等式, 133
- Biot-Savart 定律, 50

- Cauchy 定理, 76

- Dirichlet 边条件, 20

- Ewald-Oseen 灭绝定理, 113

- Kramers-Kronig 关系, 10, 75

- Neumann 边条件, 20

- Ritz 理论, 113

- Snell 定律, 64

- TE 波, 78
- TE 模式, 78
- TEM 波, 78
- TEM 模式, 78
- TM 波, 78
- TM 模式, 78

- WKB 近似, 81

- 安培-麦克斯韦定律, 2
- 安培环路定律, 2

- 本构方程, *see* 本构关系

- 本构关系, 9
- 本征方程
 - 光纤的, 84
- 本征频率, 81

- 边界节点, 40
- 边值问题, 20
- 边值问题的形式解, 21
- 变分法, 40

- 标量势, 5, 130
- 标势, 5
- 表面阻抗, 108

- 玻印廷矢量, 15
- 波包, 71
- 波导, 76
 - 介质波导, 76
 - 金属波导, 76
- 波数
 - 波导管中电磁波的, 78
- 波阻抗, 79
 - 真空的, 93, 95, 103
- 泊松方程, 19
- 泊松方程及其形式解, 19-21

- 不变间隔
 - 类光的, 115
 - 类空的, 115
 - 类时的, 115
- 不确定性关系, 72
- 布里渊波前, 76
- 布儒斯特角, 66

- 参照系, 111
 差分, 36
 场强张量, 132
 长波近似, 94
 超导体, 12
 超精细结构, 54
 程函近似, 81
 驰豫时间, 69
 重参数化变换, 126
 重参数化不变性, 127, 129
 重整化, 161
 磁标势, 54
 磁场的能量, 48–50
 磁场强度矢量, 8
 磁单极, 2, 45
 磁导率, 10
 真空中的, 2
 磁导率张量, 10
 磁多极场, 100
 磁多极场系数, 101
 磁感应强度, 2
 磁荷观点与磁标势, 54–58
 磁荷密度, 55
 磁化强度, 8
 磁化率, 11
 磁化率张量, 10
 磁矩, 8, 51
 磁矩在外磁场中的能量, 53, 54
 磁偶极场, 52
 磁偶极辐射, 96
 磁偶极辐射场, 96
 磁偶极矩, 8, 51
 磁偶极矢势, 52
 磁偶极子, 8
 磁屏蔽, 57
 磁学, 11
 单纯剖分, 38
 单纯形, 38
 单元基, 129
 导体组, 22
 德鲁德公式, 69
 等离子体频率, 69
 电场强度, 2
 电磁波
 均匀平面电磁波, 60
 电磁场, 2
 电磁势, 5, 130
 电磁现象的动量守恒, 15, 16
 电磁现象的角动量守恒, 16
 电磁现象的能量守恒, 14, 15
 电磁现象的守恒律, 14–17
 电多极场, 100
 电多极场系数, 101
 电感, 49
 电感系数, 49
 电荷密度, 2
 电荷守恒, 14
 电极化强度, 7
 电极化率, 11
 电极化率张量, 10
 电离层, 70
 电流密度, 2
 电偶极辐射, 95
 电偶极辐射场, 95
 电偶极矩, 7, 42
 电偶极子, 7
 电容, 23
 电容率, 10
 电四极辐射, 97

- 电四极辐射场, 97
 电四极矩, 42, 97
 电位移矢量, 8
- 定规范, 6
- 度规张量, 119
- 对易关系, 98
- 多极场展开, 97, 101
 平面波的, 107
 散射波的, 107
- 多极矩, 41
- 多极展开
 静磁场的, 50–52
- 多普勒效应, 121
 横向多普勒效应, 121
 纵向多普勒效应, 121
- 发散解, 157
- 发射理论, 113
- 法拉第电磁感应定律, 2
- 反常色散, 73
- 反射角, 63
- 菲涅耳公式, 65
- 非相对论极限, 127
- 分波展开
 平面波的, 107
 散射波的, 107
- 分离变量法, 29
- 分立对称性, 4
- 分析力学, 1
- 分子电流密度, 8
- 辐射规范, 6
- 辐射阻尼, 156–161
- 辐射阻尼力, 157
- 复介电常数, 67
- 感应系数, 23
- 高斯定律, 2
- 格林公式, 20
- 格林函数
 波动方程的, 92
 超前格林函数, 91
 亥姆霍兹方程的, 91
 含时格林函数, 91
 拉普拉斯算符的, 20
 推迟格林函数, 91
- 各种介质的定义, 9–12
- 共振散射, 158
- 共振吸收, 70
- 固有频率, 81
- 固有时间, 126
- 惯性参照系, 111
- 惯性系, 111
- 光缆, 81
- 光速不变原理, 112
- 光纤, 81
 单模传输, 81
 多模传输, 81
- 光纤包层, 82
- 光纤参数, 83
- 光纤核心, 82
- 光学灭绝, 113
- 光锥, 116
- 光锥条件, 142
- 光子质量上限, 81
- 规范变换, 5, 131
- 规范不变性, 1, 3
- 规范对称性, 5, 131
- 规范条件, 6
- 轨道角动量, 52

- 轨道角动量算符, 98
- 国际单位制, 2
- 哈密顿量
电磁场中带电粒子的, 130
- 亥姆霍兹方程, 91
- 汉克耳变换, 29
- 横磁波, 78, 87
- 横磁模式, 78
- 横电波, 78, 87
- 横电磁波, 78
- 横电磁模式, 78
- 横电模式, 78
- 横规范, 6
- 互感系数, 49
- 环行电流的矢势, 46–48
- 回旋半径, 135
- 回旋频率, 135
- 激波, 156
- 几何光学近似, 81
- 加法定理
球面波的, 98
- 加速器, 148
- 加速器物理, 138
- 角动量密度, 16
- 角动量平方算符, 29, 99
- 截止频率, 79
介质波导的, 85
- 节点, 38
- 介电常数, 10
真空中的, 2
- 介电张量, 10
- 介质边界的边条件, 12–14
- 介质波导, 81
- 金属的紫外透明, 70
- 经典半径
电子的, 161
- 经典电动力学, 1
- 经典力学, 1
- 经典振子模型, 68
- 静电边值问题, 19
- 静电多极展开, 40–44
- 静电镜像法, 24–27
- 静电势, 19
- 静止能量, 128
- 镜像电荷, 25
- 康普顿散射, 147
- 康普顿效应, 146
- 抗磁性, 11
- 可见光, 70
- 克莱因–高登方程, 129
- 空间反射, 4
- 空间色散, 9
- 库仑定律, 2
- 库仑规范, 6
- 扩散方程, 36
- 拉格朗日量, 126
电磁场中带电粒子的, 130
- 拉摩公式, 145, 156
- 拉普拉斯方程, 19
数值解法, 35–40
网格法, 35
- 理想导体, 12, 22
- 李纳–维谢尔势, 142
- 李纳公式, 146

- 连带勒让德函数, 30
- 连续方程, 14
- 量子电动力学, 161
- 轮廓高度参数, 83
- 洛伦兹变换, 116
 - boost 的, 117
- 洛伦兹不变性, 3
- 洛伦兹规范, 6
- 洛伦兹力, 3, 131
- 洛伦兹群, 122
- 洛伦兹收缩, 117
- 麦克耳逊—莫雷实验, 112
- 麦克斯韦方程, 1
 - 规范对称性, 5–7
 - 介质中的, 7–9
 - 真空中的, 2, 3
- 麦克斯韦协强张量, 16
- 漫散射, 105
- 面磁荷密度, 55
- 灭绝定理, 113
- 灭绝距离, 113
- 闵可夫斯基时空, 115
- 闵氏空间, 115
- 闵氏时空, 115
- 内部节点, 40
- 内积, 120
- 能量—动量守恒定律, 128
- 能量密度, 15
- 能流密度, 15
- 逆变 4-矢量, 119
- 逆变矢量, 119
- 逆磁性, 11
- 牛顿力学, 1
- 欧姆定律, 12
 - 广义的, 12
- 偶极散射, 158
- 偏振, 61
 - 椭圆偏振, 61
 - 线偏振, 61
 - 右旋圆偏振, 61
 - 左旋圆偏振, 61
- 偏振度, 104
- 漂移运动, 135
- 频谱, 149
- 平面介质波导, 82
- 切伦可夫辐射, 154–156
- 切伦可夫锥, 156
- 球贝塞尔函数, 98
- 球谐函数, 29
 - 加法定理, 30
 - 完备性, 30
 - 正交归一性, 30
- 趋肤深度, 67
- 趋肤效应, 68
- 全反射角, 66
- 全内反射, 82
- 群速度, 72, 80
- 入射角, 63
- 入射面, 63
- 瑞利散射, 105, 158
- 弱导波导, 83
- 塞曼能, 53

- 塞曼效应, 53
- 散射, 90
- 散射截面, 103
- 微分散射截面, 103
 - 总的, 103
- 散射平面, 104
- 散射相移, 109
- 散射者, 102
- 色散, 11, 61
- 非色散介质, 61
 - 色散介质, 61
- 色散关系, 75
- 上海光源, 154
- 折射角, 63
- 折射率, 61, 63
- 时间反演, 4
- 时间膨胀, 117
- 时钟变慢, 117
- 矢量势, 5, 130
- 矢势, 5
- 世界线, 116, 126, 141
- 事件, 111
- 舒曼谐振, 81
- 束缚电荷, 7
- 束缚电流密度, 8
- 衰减常数, 70
- 顺磁性, 11
- 斯托克斯参数, 62
- 四维速度, 128
- 四维张量, 121
- 缩并, 119
- 索墨菲波前, 76
- 汤姆孙公式, 146
- 汤姆孙散射, 146
- 调和函数, 21
- 铁磁介质, 11
- 铁磁体, 12
- 硬铁磁体, 12
- 铁磁性, 11
- 铁电体, 12
- 同步辐射, 151
- 同步辐射加速器, 151
- 同时的相对性, 117
- 推迟格林函数, 139
- 网格, 36
- 的边界格点, 36
 - 的格点, 36
 - 的内格点, 36
- 唯一性定理, 20, 24
- 位移电流, 2
- 无限群, 122
- 吸收系数, 70
- 狭义相对论, 1
- 线性叠加原理, 3
- 线性发散, 160
- 线性介质, 10
- 各向同性, 10
- 相对磁导率, 11
- 相对介电常数, 11
- 相对性原理, 4, 111
- 相速度, 61, 62, 80
- 消光定理, 113
- 肖特公式, 153

协变 4-矢量, 119
协变规范, 6
协变矢量, 119
协变性, 122
谐振腔, 76

信号, 112

雅可比方法, 37
亚伯拉罕-洛仑兹方程, 157
亚伯拉罕-洛仑兹模型, 159

衍射, 90

以太, 60, 112

因果性, 9, 118

有限元, 38
有限元方法, 38

宇称变换, 4

振子强度, 69

正常色散, 73
正则动量, 127

质能关系, 128

轴矢量, 4

准经典近似, 81

自感系数, 49
自能, 160
自旋角动量, 52

最小作用量原理, 126

作用量, 126