第 35 届全国中学生物理竞赛预赛试卷与参考解答

一、选择题

1. B　　2. D　　3. D　　4. CD　　5. C

二、填空题

6. $\frac{v_0}{g}\sqrt{2gH+v_0^2}$ ，

$\arccos\sqrt{\frac{2gH+v_0^2}{2(gH+v_0^2)}}$ （或 $\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{2(gH+v_0^2)}}$ ，或 $\arctan\frac{v_0}{\sqrt{2gH+v_0^2}}$ ）

7. $\frac{3\pi h}{r}$ ，　　$\frac{4\pi}{3hR}\sqrt{\frac{r^5}{g}}$

8. $\frac{L}{d}\geq 1+\frac{\tan\theta}{\mu}$ ，　　$\frac{L}{d}\geq 2$

9. 0.34 ，　　0.73

10. 5.5×10^3 ，　　15

三、计算题

11.（1）系统在竖直方向上受力平衡，有

$$F_1+F_2-mg=0 \qquad ①$$

式中，F_1 和 F_2 分别是后轮和前轮与地面之间的正压力的大小。系统相对于其质心没有转动，由力矩平衡有

$$-x_{\mathrm{C}}mg+lF_2=0 \qquad ②$$

由①②式得

$$F_1=\frac{l-x_{\mathrm{C}}}{l}mg \qquad ③$$

$$F_2=\frac{x_{\mathrm{C}}}{l}mg \qquad ④$$

（2）设骑车人开始蹬踏自行车时，在保证安全的条件下自行车的加速度为 a （朝前为正）。设地面给车后轮施加的静摩擦力大小为 f 。按照牛顿第二定律，由题意有

$$f=ma \qquad ⑤$$

系统相对于其质心没有转动，由力矩平衡有

$$y_{\mathrm{C}}f-x_{\mathrm{C}}F_1+(l-x_{\mathrm{C}})F_2=0 \qquad ⑥$$

由①⑤⑥式得

$$F_1=\left(\frac{l-x_C+\frac{a}{g}y_C}{l}\right)mg \qquad ⑦$$

$$F_2=\left(\frac{x_{\mathrm{C}}}{l}-\frac{y_{\mathrm{C}}}{l}\frac{a}{g}\right)mg \qquad ⑧$$

由⑤式和关于加速度正方向的约定，

$$a>0$$

⑦⑧式表明，随着加速度a增大，后轮与地面间的正压力F_1增大，同时前轮与地面间的正压力F_2减小。一旦$F_2=0$，系统就失去平衡。为了保证安全，应有

$$F_2\geq 0 \qquad ⑨$$

由⑧⑨式知，在保证安全的条件下自行车可达到的最大加速度大小为

$$a_{\max}=\frac{x_{\mathrm{C}}}{y_{\mathrm{C}}}g \qquad ⑩$$

12.（1）在小物块相对于平板向右滑动过程中，平板受到的滑动摩擦力为

$$f=\mu mg \qquad ①$$

方向向右。对平板，由牛顿第二定律有

$$f-kx=Ma \qquad ②$$

式中，x为弹簧的伸长，a为平板的加速度（向右为正）。令

$$x'=x-\frac{\mu mg}{k} \qquad ③$$

由①②③式得

$$-kx'=Ma \qquad ④$$

可见，平板在弹簧伸长

$$x=\frac{\mu mg}{k}$$

即

$$x'=0$$

时处于平衡位置，平板在该位置附近做简谐运动。

初始时，弹簧没有伸长

$$x=0$$

由③式知，这时

$$x'=-\frac{\mu mg}{k}$$

此时平板的运动速度为零。故平板做简谐运动的振幅A为

$$A=\frac{\mu mg}{k} \qquad ⑤$$

由④式可知，平板做简谐运动的频率ν（周期T）为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad （T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}） \qquad ⑥$$

（2）（i）平板开始时相对于地面静止，平板在t时刻相对于地面的速度为

$$V_M=A\omega\sin\omega t \qquad ⑦$$

设小物块相对于地面的初速度为v_0，小物块在平板对它的滑动摩擦力的作用下，做匀减速直线运动，加速度大小为μg。小物块在t时刻相对于地面的速度为

$$v_m = v_0 - \mu g t \quad ⑧$$

在时刻$t=\frac{T}{4}$，平板第一次经过其平衡位置，速度达到最大值

$$V_{M,\ \max} = A\omega = \mu m g\sqrt{\frac{1}{kM}} \quad ⑨$$

此时小物块的运动速度为

$$v_m(\frac{T}{4}) = v_0 - \frac{\mu g T}{4} \quad ⑩$$

由题意，此时小物块相对于平板静止，故有

$$v_m(\frac{T}{4}) = V_{M,\ \max} \quad ⑪$$

由⑥⑨⑩⑪式得

$$v_0 = \mu g\sqrt{\frac{M}{k}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{m}{M}\right) \quad ⑫$$

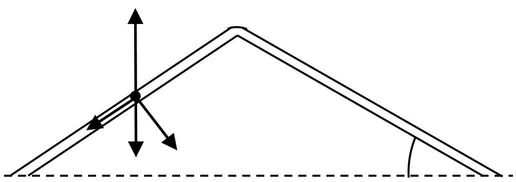
（ⅱ）小物块相对平板运动，小物块与平板之间的滑动摩擦力做负功，消耗系统的机械能而转化成热能。由能量守恒，在平板从静止开始运动四分之一周期的过程中产生的热量为

$$Q = \frac{1}{2}mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}(m+M)A^2\omega^2 + \frac{1}{2}kA^2\right) \quad ⑬$$

由⑤⑥⑫⑬式得

$$Q = \frac{\mu^2 g^2 mM}{2k}\left[\frac{\pi^2}{4} + (\pi-2)\frac{m}{M}\right] \quad ⑭$$

13.（1）小球的受力情况如图所示（为清楚起见，放大了尺寸）：向下的重力mg，向上的电场力qE，管壁对小球的正压力N_1（垂直于管壁向下为正），滑动摩擦力$\mu_1 N_1$。小球从 A 点到 B 点做初速度为零的匀加速直线运动，设加速度大小为a_1。由牛顿第二定律有



$$qE\sin\alpha - mg\sin\alpha - \mu_1 N = ma_1 \quad ①$$

$$qE\cos\alpha = mg\cos\alpha + N \quad ②$$

由①②式和题给数据得

$$a_1 = \frac{(qE-mg)(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)}{m} = 2\,\mathrm{m/s^2} \quad ③$$

由运动学公式有

$$v_{\mathrm{B}}^2 = 2a_1 l \quad ④$$

由③④式得

$$v_B = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s} \quad ⑤$$

（2）小球从B点沿BC管向下（远离B点）做匀减速直线运动直至速度为零，设加速度大小为a_2。由牛顿第二定律得

$$qE\sin\alpha - mg\sin\alpha + \mu_2 N = ma_2$$

$$qE\cos\alpha = mg\cos\alpha + N$$

与①②式相比，只是$\mu_1 \to -\mu_2$，$a_1 \to a_2$。由上述两式和题给数据得

$$a_2 = \frac{(qE - mg)(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha)}{m} = 8\,\mathrm{m/s^2} \qquad ⑥$$

由运动学公式 $v_B^2 = 2a_2 S_1$，以及③④式和题给数据得

$$S_1 = \frac{a_1}{a_2} l = 0.5\ \mathrm{m} \qquad ⑦$$

（3）小球在BC管中速度第一次减为零后返回B点过程中，滑动摩擦力方向反向，小球做匀加速直线运动，设加速度大小为 a_3。由牛顿第二定律得

$$qE\sin\alpha - mg\sin\alpha - \mu_2 N = ma_3$$
$$qE\cos\alpha = mg\cos\alpha + N$$

与①②式相比，只是 $\mu_1 \to \mu_2$， $a_1 \to a_3$。由上述两式和题给数据得

$$a_3 = \frac{(qE - mg)(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)}{m} = 4\,\mathrm{m/s^2} \qquad ⑧$$

此过程中，小球走过的路程仍为 S_1。

继而，小球远离B点在AB管中做匀减速直线运动，设加速度大小为 a_4。由牛顿第二定律可得

$$qE\sin\alpha - mg\sin\alpha + \mu_1 N = ma_4$$
$$qE\cos\alpha = mg\cos\alpha + N$$

与①②式相比，只是 $\mu_1 \to -\mu_1$， $a_1 \to a_3$。由上述两式和题给数据得

$$a_4 = \frac{(qE - mg)(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}{m} = 10\,\mathrm{m/s^2} \qquad ⑨$$

设此过程中，小球走过的路程为 S_2，类似于⑦式有

$$S_2 = \frac{a_3}{a_4} S_1 \qquad ⑩$$

设小球在AB管和BC管中第 n 次的远离B点的最大距离分别为 S_{2n} 和 S_{2n-1}，类似于⑦⑩式有

$$S_{2n} = \frac{a_3}{a_4} S_{2n-1} \qquad ⑪$$

$$S_{2n+1} = \frac{a_1}{a_2} S_{2n} \qquad ⑫$$

注意到 $S_0 \equiv l = 2\ \mathrm{m}$，小球分别在AB管和BC管中第 n 次远离B点的最大距离为

$$S_{2n} = \left(\frac{a_1}{a_2}\frac{a_3}{a_4}\right)^n S_0 \qquad ⑬$$

$$S_{2n-1} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^{n-1} S_0 \qquad ⑭$$

小球分别在AB管和BC管中运动的总路程为

$$S_{AB} = S_0 + 2\left(\sum_n S_{2n}\right) = S_0 + 2S_0 \sum_n \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^n \qquad ⑬$$

$$S_{BC} = 2\left(\sum_n S_{2n-1}\right) = 2S_0 \sum_n \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^{n-1} \qquad ⑭$$

将加速度值③⑥⑧⑨代入，取极限$n \to \infty$得

$$S_{\mathrm{AB}} = \frac{11}{9}l = \frac{22}{9}\ \mathrm{m} \quad ⑮$$

$$S_{\mathrm{BC}} = \frac{5}{9}l = \frac{10}{9}\ \mathrm{m} \quad ⑯$$

14.（1）金属棒在导轨上做匀加速直线运动，开始运动后，在时刻t，棒的速度为

$$v_t = at \quad ①$$

棒相对于起始位置的位移为

$$s_t = \frac{1}{2}at^2 \quad ②$$

由法拉第电磁感应定律，棒在时刻t的感应电动势为

$$\varepsilon_t = BLv_t \quad ③$$

由欧姆定律得，棒在时刻t的的电流为

$$i_t = \frac{\varepsilon_t}{R_t} \quad ④$$

式中R_t是在时刻t由棒和导轨构成的闭合电路的总电阻。

设棒经过时间t_l运动到 C、D 处，有

$$s_{t_l} = l \quad ⑤$$

由②⑤式和题给数据得

$$t_l = 3\mathrm{s} \quad ⑥$$

由②⑤⑥式和题给条件有

$$R_t = R + 2s_t\frac{r}{l}\text{，}\quad t \le t_l \quad ⑦$$

$$R_t = R + 2r\text{，}\quad t > t_l \quad ⑧$$

由②⑤⑥⑦⑧式和题给数据得，通过棒的电流与时间t关系为

$$i_t = \frac{2t}{4+t^2}\ \mathrm{A}\text{，}\quad t < t_1 \quad ⑨$$

$$i_t = \frac{2t}{13}\ \mathrm{A}\text{，}\quad t \ge t_1 \quad ⑩$$

⑨⑩式中，t取以秒为单位的数值，电流单位为 A。

（2）从金属棒开始运动直至到达 CD 位置的过程中，棒受到的安培力为

$$F_{\mathrm{A}} = Bi_tL \quad ⑪$$

由牛顿第二定律得

$$F - F_{\mathrm{A}} - mg\sin\theta = ma$$

或

$$F = F_{\mathrm{A}} + mg\sin\theta + ma \quad ⑫$$

由⑨⑩⑪⑫式和题给数据得

$$F = \left(1.2 + \frac{2}{\frac{4}{t} + t}\right)\ \mathrm{N} \quad ⑬$$

在⑬式及其下一式中，t 取以 s 为单位的数值。因

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{t} + t\right) \geq \sqrt{\frac{4}{t}t} = 2$$

拉力 F 的最大值为

$$F_{\max} = 1.7\ \mathrm{N} \quad ⑭$$

15.（1）由题给条件，对于被封住的理想气体的初态，其体积和温度为

$$V_1 = 60\ \mathrm{cm} \cdot S，\ T_1 = 300\mathrm{K}$$

式中 S 为左边试管的横截面积。由力平衡条件和题给数据知，其压强 p_1 满足

$$p_1 = p_0 + 24\ \mathrm{cmHg} \quad ①$$

式中，p_0 为大气压强。

当被封闭的理想气体温度升高到 T_2 时，一部分水银通过小孔溢出到右边试管中，以至于左边试管中所剩水银柱的高度为 x。由力平衡条件，此时气体的压强 p_2 为

$$p_2 = p_0 + x \quad ②$$

$$V_2 = [(60 + 24 + 16)\ \mathrm{cm} - x] \cdot S \quad ③$$

式中 x 是以 cmHg 为单位的数值（当它表示压强时）或以 cm 为单位的数值（当它表示长度时），下同。由理想气体状态方程有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad ④$$

由①②③④式和题给数据得

$$T_2 = \frac{(76 + x)(100 - x)}{20}$$

式中 T_2 是以 K 为单位的数值（下同），或

$$T_2 = 387.2 - \frac{(x - 12)^2}{20} \quad ⑤$$

由⑤式可知，当

$$x = 12\ \mathrm{cm} \quad ⑥$$

时，温度 T_2 达到最高，此最高温度为

$$T_{2\max} = 387.2\ \mathrm{K} \quad ⑦$$

（2）当气体的温度为 384K 时，由⑤式得

$$(x - 12)^2 = 64 \quad ⑧$$

其解为

$$x_a = 20\ \text{cm}$$ ⑨

$$x_b = 4\ \text{cm}$$ ⑩

16.（1）根据两平面镜夹角为$72°$，和平面镜反射成像规律，P 和 P 的像的中心恰是一正五边形的顶点，在图 b 中标出的 P 的所有像的方位示意图如图（1）所示。

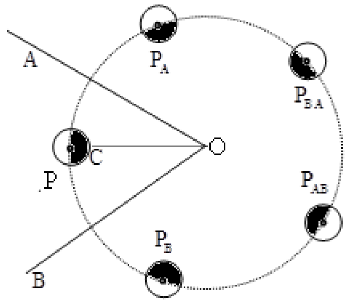


图 (1)

P 的像共有

$$n = 4$$ ①

个，即

P_A， P_B， P_{AB}， P_{BA}

且 P_A 是 P 在镜 A 中的像，因而

P 与 P_A 对镜面 A 镜面对称； ②

P_B 是 P 在镜 B 中的像，因而

P 与 P_B 对镜面 B 镜面对称； ③

P_{AB} 是 P_A 在镜 B 中的像，因而

P_A 与 P_{AB} 对镜面 B 镜面对称； ④

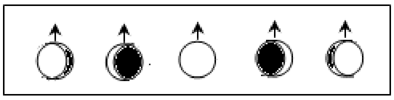
且 P_{BA} 是 P_B 在镜 A 中的像，因而

P_B 与 P_{BA} 对镜面 A 镜面对称 ⑤

（2）照相机沿 CO 方向拍摄到的像是

P_A， P_{BA}， P， P_{AB}， P_B

面向 CO 方向的头像表面的形象，如图（2）所示。



图（2）