# 第 34 届全国中学生物理竞赛预赛参考解答

## 一、选择题.

1. [BCD]；2. [D]；3. [ACD]；4. [D] ；5. [C]

## 二、填空题

6. 2.2

7. 3:2

8. $3\mu$C

9. [ $(20,-\frac{20}{3}\sqrt{3},0)$ 或 $(20,-\frac{20}{3}\sqrt{3})$

10. 不守恒

墙壁对弹簧有作用力（外力），且在运动参考系中，该力的作用点有位移，所做的功不为零

## 三、计算题

11. （1）若没有火柴棍 B 和 C，则挂重物时在过 A 的竖直平面内的情景如图 1 所示。因棉线直径 $d \neq 0$，棉线的中心轴线到 O 点的距离为 $\frac{d}{2}$，重物相对于支撑点 O 有一力矩

$$L = \frac{d}{2}Mg \qquad ①$$

式中 $M$ 为重物的质量，$g$ 为重力加速度的大小，此力矩会使火柴棍转动直至掉下。

（2）如题图所示的结构可以稳定地悬挂起重物，当重物和火柴棍的质量趋于零时（未挂重物时）时，在过火柴棍 A 的竖直平面内的情景应如图 2.a 所示。由题设，火柴棍与桌沿、火柴棍与棉线以及火柴棍之间都足够粗糙（可以没有滑动），可形成一个稳定的三脚架结构。由于火柴棍 A 水平，火柴棍 B 的下端正好在 A 的中点的正下方，由几何关系知，火柴棍 A 和 B 之间的夹角为

$$\alpha = 60° \qquad ②$$

（由于 $d << l$，此时忽略了棉线的粗细），

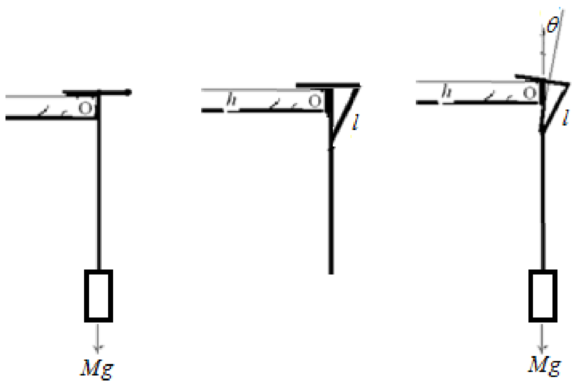



图1　图2.a　图2.b

桌面上表面边沿 O 点到火柴棍 B 的下端（即火柴棍 C 的中点）的距离为

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2}l \qquad ③$$

又由于火柴棍 C 水平，由几何关系知，从 O 点到火柴棍 C 两端的距离均为 $l$。

值得指出的是，据题意，前面提及的三脚架结构在重物质量逐渐增大时是稳定的：因为根据题意，火柴棍与棉线之间是足够粗糙的，以至于跨过火柴棍 A 的棉线与它所连接的火柴棍 C 形成的正三角形能得以保持，且火柴棍 C 也继续保持水平，因而火柴棍 B 与 A 之间的夹角也能得以保持不变，从而在图 2.b 中，火柴棍 A 和 B 之间的夹角仍然为 $60°$ 。

小心地挂上重物，在过火柴棍 A 的竖直平面内的情景如图 2.b 所示。这时，火柴棍 A 受到四个力的作用：火柴棍 B 对它的头部的斜向上的推力、跨过火柴棍 A 的中部的细棉线对它的竖直向下的压力、桌面上边沿 O 点对它的正压力和静摩擦力。火柴棍 A 与桌面之间静摩擦力在一定范围内可以保证火柴棍 A 所受合力为零。同时，由于力矩 $L$ 的作用，火柴棍 A 会绕 O 点转动，通过火柴棍 B 的带动，绕过 A 连结火柴棍 C 两端的棉线将绕桌面下表面的边沿转过一小角度，使重物向左平移；当重物向左平移的距离达到 $\frac{d}{2}$ 时，重物处于桌沿 O 的正下方，重力作用线恰好过支点 D（见图 3），因而对 D 点的力矩为零，整个系统不会转动，从而达到稳定平衡。设此时过 A 连结火柴棍 C 两端的棉线绕桌面下表面的边沿转过的角度 $\angle \mathrm{DW'D'} = \theta$ ，如示意图 3 所示；图中 D 是桌面下表面边沿，且

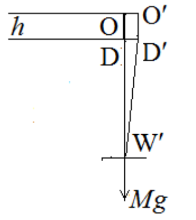


图3

$$\mathrm{OO'} = \mathrm{DD'} = \frac{d}{2},$$

$$\mathrm{OD} = \mathrm{O'D'} = h$$

$\mathrm{W'}$ 是火柴棍 C 的中点，显然

$$\mathrm{D'W'} = L - h = \frac{\sqrt{3}}{2}l - h \qquad ④$$

在直角 $\Delta \mathrm{DW'D'}$ 中，由几何关系得

$$\sin\theta = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l - h} \qquad ⑤$$

或

$$\theta = \arcsin\frac{d}{\sqrt{3}l - 2h} \qquad ⑥$$

12. （1）该方形线框的质量

$$m = 4L\pi r_0^2\rho \qquad ①$$

方形线框的重力相对于 AB 边的力矩为

$$\begin{aligned} L_g &= mg\frac{L}{2}\cos\theta \\ &= 4L\pi r_0^2\rho g\frac{L}{2}\cos\theta = 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta \end{aligned} \qquad ②$$

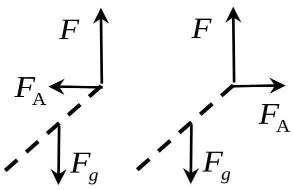
（2）拉力 $F$ 的力矩为

$$L_F = FL\cos\theta \qquad ③$$

对于线圈 abcd 四条边来说，ab 边为转轴，bc 和 da 边产生的安培力相互抵消，力矩之和为零，只有 cd 边产生安培力的力矩。设 cd 边受到的安培力设为 $F_{\mathrm{A}}$ ，有

$$L_A = F_{\mathrm{A}} L\sin\theta \qquad ④$$

该系统稳定，所以重力 $F_g$ 的力矩 $L_g$ 、安培力 $F_{\mathrm{A}}$ 的力矩 $L_{\mathrm{A}}$ 和拉力力矩 $L_F$ 平衡。有两种情况（受力图分别如图 a 和图 b 所示，图中虚线是线框 ab 边和 cd 边中点的连线）：



图a 图b

$$L_{\mathrm{A}} = L_g - L_F \qquad ⑤$$

或

$$L_{\mathrm{A}} = L_F - L_g \qquad ⑥$$

所以安培力 $F_A$ 的力矩为

$$L_{\mathrm{A}} = 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta - FL\cos\theta \qquad ⑦$$

或

$$L_{\mathrm{A}} = FL\cos\theta - 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta \qquad ⑧$$

由④⑦⑧式得

$$F_{\mathrm{A}} = (2L\pi r_0^2\rho g - F)\cot\theta \qquad ⑨$$

或

$$F_{\mathrm{A}} = (F - 2L\pi r_0^2\rho g)\cot\theta \qquad ⑩$$

（3）这时通过线框上的磁通量为

$$\phi(\theta) = L^2 B\cos\theta \qquad ⑪$$

感应电动势为

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = L^2\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑫$$

设该方形线框的电阻为 $R$ ，由电阻定律有

$$R = \frac{4L}{\sigma\pi r_0^2} \qquad ⑬$$

由⑫⑬式得，该方形线框上的感应电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{L}{4}\sigma\pi r_0^2\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑭$$

cd 边所受到的安培力的大小为

$$F_{\mathrm{A}} = iBL = \frac{L^2}{4}\sigma\pi r_0^2 B\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑮$$

由⑨⑩⑮式得

$$\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \frac{8\rho g}{BL\sigma\sin\theta} \qquad ⑯$$

13. （1）设大气压强为 $p_0$。初态：I 室内气体压强为 $p_1$；III 室内气体压强为 $p_1'$，气柱的长度为 $l'$。末态：I 室内气体压强为 $p_2$；III 室内气体压强为 $p_2'$。由初态到末态：活塞右移距离为 $d$。对初态应用气体状态方程，对 I 室内气体有

$$p_1 lS = \nu RT_1 \qquad ①$$

对 II 室内气体有

$$p_0(\frac{l}{2}\times S + \frac{l}{2}\times 2S) = \frac{3}{2}\nu_0 RT_1 \qquad ②$$

对 III 室内气体有

$$p_1' l'(2S) = (2\nu)RT_1 \qquad ③$$

由力学平衡条件有

$$p_1'(2S) = p_1 S + p_0(2S - S) \qquad ④$$

由题给条件和①②③④式得

$$l' = \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_0} l = \frac{2\nu}{\nu + \nu_0} l \qquad ⑤$$

（2）对末态应用气体状态方程，对 I 室内气体有

$$p_2(l-d)S = \nu RT_2 \qquad ⑥$$

对 III 室内气体有

$$p_2'(l'+d)(2S) = (2\nu)RT_2' \qquad ⑦$$

由力学平衡条件有

$$p_2'(2S) = p_2 S + p_0(2S - S) \qquad ⑧$$

联立②③⑤⑥⑦⑧式和题给条件得

$$T_2' = \frac{2\nu l + (\nu+\nu_0)d}{(l-d)(\nu+\nu_0)}\left(1+\frac{\nu_0}{2\nu}\frac{l-d}{l}\right)T_1 \qquad ⑨$$

（3）大气对密闭气体系统做的功为

$$W = p_0(2S-S)(-d) = -p_0 Sd = -\frac{d}{l}\nu_0 RT_1 \qquad ⑩$$

已利用②式。系统密闭气体内能增加量为

$$\Delta U = \nu C(T_2 - T_1) + (2\nu)C(T_2' - T_1) = \nu C(2T_2' - T_1) \qquad ⑪$$

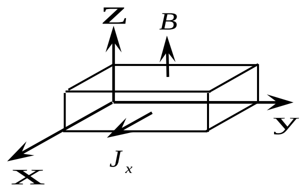
由⑨⑪式得

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{2\nu l + (\nu+\nu_0)d}{(l-d)(\nu+\nu_0)}\left(2\nu+\frac{l-d}{l}\nu_0\right)CT_1 - \nu CT_1 \\ &= \left[\frac{2\nu l + (\nu+\nu_0)d}{(l-d)(\nu+\nu_0)}\left(2+\frac{l-d}{l}\frac{\nu_0}{\nu}\right)-1\right]\nu CT_1\end{aligned} \qquad ⑫$$

密闭气体系统吸收的热量为

$$Q=\Delta U-W=\left[\frac{2\nu l+(\nu+\nu_0)d}{(l-d)(\nu+\nu_0)}\left(2+\frac{l-d}{l}\frac{\nu_0}{\nu}\right)-1\right]\nu CT_1+\frac{d}{l}\nu_0 RT_1 \quad ⑬$$

14. 为确定起见，取坐标系如图所示，磁场沿 z 方向，通电电流 $J_x$ 沿 x 方向。设半导体材料中的载流子空穴和电子沿 $x$ 方向的平均速率分别为 $\upsilon_{\mathrm{px}}$ 和 $\upsilon_{\mathrm{nx}}$，沿 $x$ 方向的电流密度为




$$J_{\mathrm{x}}=ep\left(\upsilon_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{x}}+(-e)n\left(-\upsilon_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{x}} \quad ①$$

式中

$$\left(\upsilon_p\right)_x=\mu_p E_x \quad ②$$

$$\left(-\upsilon_n\right)_x=-\mu_n E_x \quad ③$$

如果沿$x$ 方向的电流中只有一种载流子，则当作用于载流子的洛仑兹力与霍尔电场的作用力平衡时，霍尔电场达到稳定，如金属导体。在半导体中，存在两种载流子，同一磁场对两种载流子受到的洛仑兹力方向相同，所受到的霍尔电场力方向相反，两种载流子受到的洛仑兹力不可能同时与霍尔电场力平衡，所以在半导体样品存在载流子的横向流动，当任何时刻流向样品同一侧面的空穴数与电子数相等时，霍尔电场便达到稳定。设两种载流子的横向平均速率分别为 $(\upsilon_{\mathrm{p}})_y$ 和 $(\upsilon_{\mathrm{n}})_y$ 则横向电流密度为

$$J_{\mathrm{y}}=ep\left(-\upsilon_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{y}}+(-e)n\left(-\upsilon_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{y}} \quad ④$$

这时，空穴在横向受到的作用力的大小为

$$F_{\mathrm{py}}=e\left[E_y-\left(\upsilon_{\mathrm{p}}\right)_x B_{\mathrm{z}}\right] \quad ⑤$$

电子在横向受到的作用力的大小为

$$F_{\mathrm{ny}}=(-e)\left[E_y-\left(-\upsilon_{\mathrm{n}}\right)_x B_{\mathrm{z}}\right] \quad ⑥$$

故两种载流子的横向平均速度为

$$\left(-\upsilon_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{y}}=\mu_{\mathrm{p}}\left[E_{\mathrm{y}}-\left(\upsilon_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{x}}B_{\mathrm{z}}\right] \quad ⑦$$

$$\left(-\upsilon_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{y}}=-\mu_{\mathrm{p}}\left[E_{\mathrm{y}}+\left(\upsilon_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{x}}B_{\mathrm{z}}\right] \quad ⑧$$

霍尔电场达到稳定时有

$$J_{\mathrm{y}}=0 \quad ⑨$$

由④⑦⑧⑨及②③各式得

$$E_{\mathrm{y}}=\frac{p\mu_{\mathrm{p}}^2-n\mu_{\mathrm{n}}^2}{\left(p\mu_{\mathrm{p}}+n\mu_{\mathrm{n}}\right)}E_{\mathrm{x}}B_{\mathrm{z}} \quad ⑩$$

根据霍尔系数的定义以及④⑩两式得

$$R_{\mathrm{H}}=\frac{1}{e}\frac{p\mu_{\mathrm{p}}^2-n\mu_{\mathrm{n}}^2}{\left(p\mu_{\mathrm{p}}+n\mu_{\mathrm{n}}\right)^2} \quad ⑪$$

15. （1）为普遍起见，设两个物体质量分别为$m_1$和$m_2$，初速度分别为$v_1$和 0，发生完全非弹性碰撞后共同速度为$v$，则碰前的动能

$$E=\frac{1}{2}mv_1^2 \quad ①$$

由于细绳拉紧前后时间间隔极短，可以忽略摩擦阻力，故前后动量守恒，有

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v \quad ②$$

碰后的动能之和（即系统剩余动能）为

$$E'=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 \quad ③$$

由①②③式得

$$E'=\frac{m_1}{m_1+m_2}E \quad ④$$

[损失的动能为

$$\Delta E=E-E'=\frac{m_2}{m_1+m_2}E$$ ]

设第 1 个滑扣以速度$v_{10}$开始运动

$$E_0=\frac{1}{2}mv_{10}^2 \quad ⑤$$

在第 1 个滑扣滑动距离$L$、第 1 与第 2 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$E_{1f}=E_0-\mu mgL \quad ⑥$$

在第 1 个滑扣与第 2 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为（根据④式）

$$E_{20}=\frac{1}{1+1}E_{1f}=\frac{1}{2}E_{1f} \quad ⑦$$

在第 1、2 个滑扣共同滑动距离$L$、第 2 与第 3 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$\begin{aligned}E_{2f}&=E_{20}-2\mu mgL\\&=\frac{1}{2}(E_0-\mu mgL)-2\mu mgL\\&=\frac{1}{2}E_0-\frac{1}{2}(1^2+2^2)\mu mgL\end{aligned} \quad ⑧$$

在第 2 与第 3 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为（根据④式）

$$E_{30}=\frac{2}{2+1}E_{2f}=\frac{2}{3}E_{2f} \quad ⑨$$

在第 1、2、3 个滑扣共同滑动距离 $L$、第 3 与第 4 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$
\begin{aligned}
E_{3f} &= E_{30} - 3\mu mgL \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}E_0 - \frac{1}{2}(1^2+2^2)\mu mgL\right) - 3\mu mgL \\
&= \frac{1}{3}E_0 - \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2)\mu mgL
\end{aligned}
\qquad ⑩
$$

依次类推，在第 $k$ 个与第 $k+1$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$
\begin{aligned}
E_{kf} &= \frac{1}{k}E_0 - \frac{1}{k}[1^2+2^2+\cdots+k^2]\mu mgL \\
&= \frac{1}{k}E_0 - \frac{(k+1)(2k+1)}{6}\mu mgL
\end{aligned}
\quad , \qquad 1 \le k \le n-2
$$

于是，在第 $(n-2)$ 个与第 $(n-1)$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$
\begin{aligned}
E_{(n-2)f} &= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{1}{n-2}[1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2]\mu mgL \\
&= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{1}{n-2}\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\mu mgL \\
&= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{(n-1)(2n-3)}{6}\mu mgL
\end{aligned}
\qquad ⑪
$$

在第 $(n-2)$ 与第 $(n-1)$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为

$$
E_{(n-1)0} = \frac{n-2}{n-1}E_{(n-2)\mathrm{f}} = \frac{1}{n-1}E_0 - \frac{(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL \qquad ⑫
$$

由⑪⑫式可知，若

$$
\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL < E_0 < \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\mu mgL \qquad ⑬
$$

则从第 1 个滑扣开始的 $(n-1)$ 个滑扣都依次拉紧，且可继续滑行距离 $l$（$0 \le l < L$）后静止。因而有

$$
E_{(n-1)0} = \frac{1}{n-1}E_0 - \frac{(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL = (n-1)\mu mgl \qquad ⑭
$$

由⑤⑭式得

$$
v_{10} = \sqrt{\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{3}L + 2(n-1)l\right](n-1)\mu g} \qquad ⑮
$$

（2）整个过程中克服摩擦力所做的功为

$$
\begin{aligned}
W &= \mu mgL + \mu(2m)gL + \mu(3m)gL + \cdots + \mu[(n-2)m]gL + \mu[(n-1)m]gl \\
&= \mu mgL[1+2+3+\cdots(n-2)] + \mu(n-1)mgl \\
&= \left[\frac{(n-2)}{2}L + l\right](n-1)\mu mg
\end{aligned}
\qquad ⑯
$$

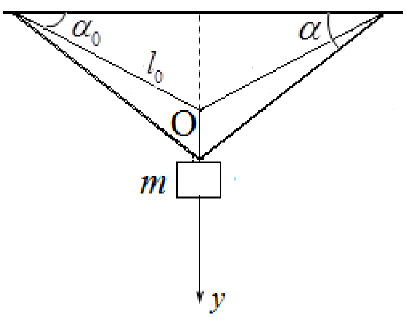
（3）在整个过程中仅仅由于细线拉紧引起的总能量损失为

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}mv_{10}^2 - W \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{3}L + 2(n-1)l\right](n-1)\mu mg - \left[\frac{(n-2)}{2}L + l\right](n-1)\mu mg \\ &= \left[\frac{(n-2)(2n-3)}{6}L + (n-1)l\right](n-1)\mu mg - \left[\frac{(n-2)}{2}L + l\right](n-1)\mu mg \\ &= \left[\frac{(n-2)(n-3)}{3}L + (n-2)l\right](n-1)\mu mg\end{aligned} \quad ⑰$$

16. （1）取小物块的平衡位置为原点 O，$y$ 轴的方向竖直向下，如图所示。由牛顿第二定律可知：

$$ma = mg - 2k\left(l - L\right)\sin\alpha \quad ①$$

式中 $a$ 为物块的加速度，$L$ 为弹性绳的原长，$l$ 和 $\alpha$ 分别为物块离开平衡位置的位移为 $y$ 时弹性绳的长度和弹性绳与水平面的夹角。由几何关系有




$$l = \sqrt{d^2 + \left(l_0\sin\alpha_0 + y\right)^2} \quad ②$$

$$\sin\alpha = \frac{l_0\sin\alpha_0 + y}{l} \quad ③$$

式中 $d = l_0\cos\alpha_0$。由于 $y$ 很小，$y^2$ 可略去，利用近似计算公式当 $x << 1$ 时，$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$，注意到 $l_0 = \sqrt{d^2 + \left(l_0\sin\alpha_0\right)^2}$，②式可简化为

$$l = l_0 + y\sin\alpha_0 \quad ④$$

将④式代入③式，利用近似计算公式当 $x << 1$ 时，$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$，并忽略 $y^2$ 项，③式可简化为

$$l_0\sin\alpha = l_0\sin\alpha_0 + y\cos^2\alpha_0 \quad ⑤$$

当小物块处在平衡位置时有

$$mg = 2k\left(l_0 - L\right)\sin\alpha_0 \quad ⑥$$

即

$$L = l_0 - \frac{mg}{2k\sin\alpha_0} \quad ⑦$$

将⑤⑥⑦式代入①式，略去 $y^2$ 项，可将①式化成

$$ma = -\left(2k\sin^2\alpha_0 + \frac{mg}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)y \quad ⑧$$

上式右端括号中的量是大于零的常量，⑧式可表示为

$$ma=-m\omega^2 y \qquad ⑨$$

式中

$$\omega^2=\frac{2k}{m}\sin^2\alpha_0+\frac{g}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0} \qquad ⑩$$

⑨式是简谐振动的动力学方程。因此，当 $y$ 很小时，小物块做简谐振动。

（2）小物块做简写振动的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m}\sin^2\alpha_0+\frac{g}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}}} \qquad ⑪$$

将题给数据代入⑪式得

$$T=1.8\mathrm{s} \qquad ⑫$$

（3）因将小物块拉开距离 $y_0=0.010\mathrm{m}$ 时从静止松手，故小物块做简谐振动的振幅为

$$A=0.010\mathrm{m} \qquad ⑬$$

初始时，小物块速度为零，小物块位于在最大振幅处，其初相位为

$$\varphi_0=0 \qquad ⑭$$

圆频率为

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=3.5\mathrm{rad/s} \qquad ⑮$$

故在国际单位制中，小物块做简谐振动的方程为

$$y=0.010\times\cos\left(3.5\times t\right) \qquad ⑯$$