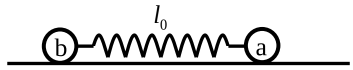
第 34 届全国中学生物理竞赛决赛
理论试题与参考解答

一、如图，质量分别为m_{a}、m_{b}的小球 a、b 放置在光滑绝缘水平面上，两球之间用一原长为l_0、劲度系数为k_0的绝缘轻弹簧连接。



（1）$t=0$时，弹簧处于原长，小球 a 有一沿两球连线向右的初速度v_0，小球 b 静止。若运动过程中弹簧始终处于弹性形变范围内，求两球在任一时刻t（$t>0$）的速度。

（2）若让两小球带等量同号电荷，系统平衡时弹簧长度为L_0。记静电力常量为K。求小球所带电荷量和两球与弹簧构成的系统做微振动的频率（极化电荷的影响可忽略）。

参考解答：

（1）如图 I，t时刻弹簧的伸长量为

$$u=l-l_0$$

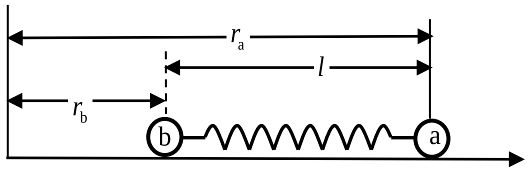


图 I

有

$$\mu\frac{d^2u}{dt^2}=-k_0u \qquad ①$$

式中

$$\mu=\frac{m_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}} \qquad ②$$

为两小球的约化质量。由①②式知，弹簧伸长量u服从简谐振动的动力学方程，振动频率为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_0}{\mu}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{a}}+m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{b}}}k_0} \qquad ③$$

最后一步利用了②式。t时刻弹簧的伸长量u的表达式为

$$u=A\sin\omega t+B\cos\omega t \qquad ④$$

式中A、B为待定常量。$t=0$时，弹簧处于原长，即

$$u(0)=B=0$$

将$B=0$代入④式得

$$u=A\sin\omega t \qquad ⑤$$

a 相对于 b 的速度为

$$v'_{\mathrm{a}}=\frac{dr_{\mathrm{a}}}{dt}-\frac{dr_{\mathrm{b}}}{dt}=\frac{du}{dt}=A\omega\cos\omega t \qquad ⑥$$

$t=0$时有

$$v'_{\mathrm{a}}(0)=v_0-0=A\omega \qquad ⑦$$

由⑥⑦式得

$$v'_{\mathrm{a}} = v_0 \cos\omega t \qquad ⑧$$

系统在运动过程中动量守恒

$$m_{\mathrm{a}} v_0 = m_{\mathrm{a}} v_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}} v_{\mathrm{b}} \qquad ⑨$$

小球 a 相对于地面的速度为

$$v_{\mathrm{a}} = v'_{\mathrm{a}} + v_{\mathrm{b}} \qquad ⑩$$

由③⑧⑨⑩式可得，t 时刻小球 a 和小球 b 的速度分别为

$$v_{\mathrm{a}} = \left[1 + \frac{m_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{a}}} \cos\left(\sqrt{\frac{(m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}})k_0}{m_{\mathrm{a}} m_{\mathrm{b}}}}\, t\right)\right] \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}}} v_0 \qquad ⑪$$

$$v_{\mathrm{b}} = \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{(m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}})k_0}{m_{\mathrm{a}} m_{\mathrm{b}}}}\, t\right)\right] \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}}} v_0 \qquad ⑫$$

（2）若两球带等量同号电荷，电荷量为 q，系统平衡时有

$$K \frac{q^2}{L_0^2} = k_0 (L_0 - l_0) \qquad ⑬$$

由⑬式得

$$q = L_0 \sqrt{\frac{k_0}{K}(L_0 - l_0)} \qquad ⑭$$

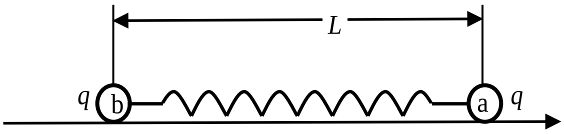


图 II

设 t 时刻弹簧的长度为 L（见图 II），有

$$\mu \frac{d^2 L}{dt^2} = -k_0 (L - l_0) + K \frac{q^2}{L^2} \qquad ⑮$$

令 $x = L - L_0$ 为 t 时刻弹簧相对平衡时弹簧长度 L_0 的伸长量，⑮式可改写为

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_0 x - k_0 (L_0 - l_0) + K \frac{q^2}{L_0^2} \left(1 + \frac{x}{L_0}\right)^{-2} \qquad ⑯$$

系统做微振动时有

$$x << L_0$$

因而

$$\left(1 + \frac{x}{L_0}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{x}{L_0} + O\left[\left(\frac{x}{L_0}\right)^2\right] \qquad ⑰$$

利用上式，⑯式可写为

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \left[-k_0 (L_0 - l_0) + K \frac{q^2}{L_0^{\ 2}}\right] - \left(k_0 + 2K \frac{q^2}{L_0^{\ 3}}\right) x + O\left[\left(\frac{x}{L_0}\right)^2\right] \qquad ⑱$$

略去 $O\left[\left(\frac{x}{L_0}\right)^2\right]$，并利用⑬或⑭式，⑱式可写为

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}=-\left(k_0+2K\frac{q^2}{L_0^{\ 3}}\right)x=-\frac{3L_0-2l_0}{L_0}k_0x \qquad ⑲$$

由⑬式知，$L_0>l_0$，故$3L_0-2l_0>0$。系统的微振动服从简谐振动的动力学方程，振动频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{3L_0-2l_0}{L_0}\right)k_0}{\mu}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{3L_0-2l_0}{L_0}\right)\left(\frac{m_a+m_b}{m_am_b}\right)k_0} \qquad ⑳$$

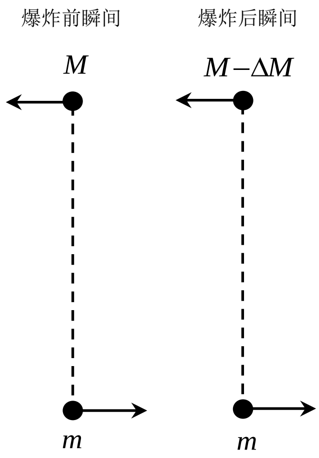
最后一步利用了②式。

二、双星系统是一类重要的天文观测对象。假设某两星体均可视为质点，其质量分别为M和m，一起围绕它们的质心做圆周运动，构成一双星系统，观测到该系统的转动周期为T_0。在某一时刻，M星突然发生爆炸而失去质量ΔM。假设爆炸是瞬时的、相对于M星是各向同性的，因而爆炸后M星的残余体M'（$M'=M-\Delta M$）星的瞬间速度与爆炸前瞬间M星的速度相同，且爆炸过程和抛射物质ΔM都对m星没有影响。已知引力常量为G，不考虑相对论效应。

（1）求爆炸前M星和m星之间的距离r_0；

（2）若爆炸后M'星和m星仍然做周期运动，求该运动的周期T_1；

（3）若爆炸后M'星和m星最终能永远分开，求M、m和ΔM三者应满足的条件。



参考解答：

（1）两体系统的相对运动相当于质量为$\mu=\frac{Mm}{M+m}$的质点在固定力场中的运动，其运动方程是

$$\frac{Mm}{M+m}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad ①$$

其中$\boldsymbol{r}$是两星体间的相对位矢。①式可化为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad ②$$

由②式可知，双星系统的相对运动可视为质点在质量为$M+m$的固定等效引力源的引力场中的运动。爆炸前为圆周运动，其运动方程是

$$\frac{G(M+m)}{r_0^2}=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2r_0 \qquad ③$$

由③式解得

$$r_0=\left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad ④$$

（2）爆炸前，m星相对于M星的速度大小是

$$v_0=\frac{2\pi r_0}{T_0}=\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{2\pi G(M+m)}{T_0}\right)^{1/3} \quad ⑤$$

方向与两星体连线垂直。

爆炸后，等效引力源的质量变为

$$M_{\square}=M'+m=M+m-\Delta M \quad ⑥$$

相对运动轨道从圆变成了椭圆、抛物线或双曲线。由爆炸刚刚完成时（取为初始时刻）两星体的位置和运动状态可知，两星体初始距离为r_0，初始相对速度的大小为v_0，其方向与两星体连线垂直，所以初始位置必定是椭圆、抛物线或双曲线的顶点。对于椭圆轨道，它是椭圆长轴的一个端点。

设椭圆轨道长轴的另一个端点与等效引力源的距离为r_1，在r_1处的速度（最小速度）为$v_{\min}$（理由见⑪式），由角动量守恒和机械能守恒得

$$r_1v_1=r_0v_0 \quad ⑦$$

$$\frac{v_1^2}{2}-\frac{GM_{\square}}{r_1}=\frac{v_0^2}{2}-\frac{GM_{\square}}{r_0} \quad ⑧$$

由⑦⑧式得r_1满足方程

$$\left(\frac{2GM_{\square}}{r_0}-v_0^2\right)r_1^2-2GM_{\square}r_1+r_0^2v_0^2=0 \quad ⑨$$

由⑨式解得

$$\begin{aligned}r_1&=\left(\frac{2GM_{\square}}{r_0}-v_0^2\right)^{-1}\left(GM_{\square}+\sqrt{G^2M_{\square}^2-\left(\frac{2GM_{\square}}{r_0}-v_0^2\right)r_0^2v_0^2}\right)\\&=\frac{r_0}{2GM_{\square}-r_0v_0^2}(GM_{\square}+r_0v_0^2-GM_{\square})=\frac{r_0v_0^2}{2GM_{\square}-r_0v_0^2}r_0\end{aligned} \quad ⑩$$

另一解r_0可在⑩式右端根号前取减号得到。由⑩式可知

$$r_1>r_0 \quad ⑪$$

利用方程⑨和韦达定理（或由⑩式），椭圆的半长轴是

$$a=\frac{r_0+r_1}{2}=\frac{GM_{\square}}{2GM_{\square}-r_0v_0^2}r_0=\left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}\frac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M} \quad ⑫$$

要使运行轨道为椭圆，应有

$$0<a<\infty \quad ⑬$$

由⑫⑬式得

$$M+m-2\Delta M>0 \quad ⑭$$

据开普勒第三定律得

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\square}}} \quad ⑮$$

将⑥⑫式代入⑮式得

$$T_1=\sqrt{\frac{(M+m)(M+m-\Delta M)^2}{(M+m-2\Delta M)^3}}T_0 \quad ⑯$$

[解法（二）

爆炸前，设M星与m星之间的相对运动的速度为$v_{相对0}$，有

$$v_{相对0}=\sqrt{\frac{G(M+m)}{r_0}} \qquad ⑤$$

爆炸后瞬间，m星的速度没有改变，$M-\Delta M$星与爆炸前的速度相等，设$M-\Delta M$星与m星之间的相对运动的速度为$v_{相对}$，有

$$v_{相对}=v_{相对0} \qquad ⑥$$

爆炸后质心系的总动能为

$$E_{\mathrm{k}}'=\frac{1}{2}\frac{(M-\Delta M)m}{M+m-\Delta M}v_{相对}^2 \qquad ⑦$$

质心系总能量为

$$E'=E_{\mathrm{k}}'-\frac{G(M-\Delta M)m}{r_0} \qquad ⑧$$

对于椭圆轨道运动有

$$E'=-\frac{G(M-\Delta M)m}{2A} \qquad ⑨$$

式中

$$A=\frac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M}r_0 \qquad ⑩$$

由开普勒第三定律有

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{G(M+m)}} \qquad ⑪$$

由⑩⑪式有

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{A_0^3}{G(M+m-\Delta M)}} \qquad ⑫$$

有

$$T_1=\left[\frac{(M+m)(M+m-\Delta M)^2}{(M+m-2\Delta M)^3}\right]^{1/2}T_0 \qquad ⑬$$

]

（3）根据⑫式，当$\Delta M\geq(M+m)/2$的时候，⑬式不再成立，轨道不再是椭圆。所以若M'星和m星最终能永远分开，须满足

$$\Delta M\geq(M+m)/2 \qquad ⑰$$

由题意知

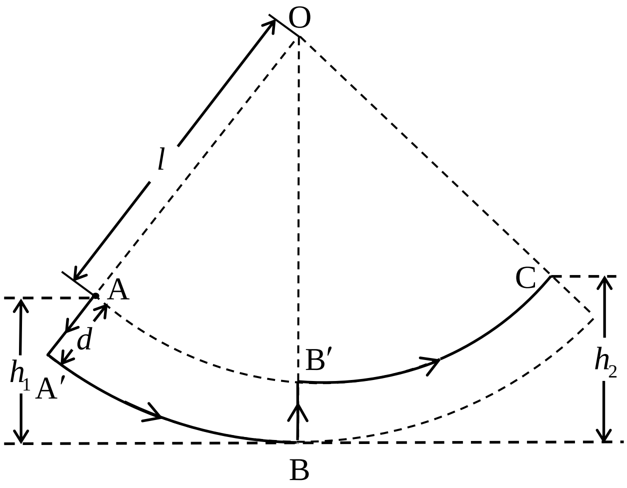
$$M>\Delta M \qquad ⑱$$

联立⑰⑱式知，还须满足

$$M>m \qquad ⑲$$

⑯⑲式即为所求的条件。

三、熟练的荡秋千的人能够通过在秋千板上适时站起和蹲下使秋千越荡越高。一质量为 m 的人荡一架底板和摆杆均为刚性的秋千，底板和摆杆的质量均可忽略，假定人的质量集中在其质心。人在秋千上每次完全站起时其质心距悬点 O 的距离为 l，完全蹲下时此距离变为 $l+d$ 。实际上，人在秋千上站起和蹲下过程都是在一段时间内完成的。作为一个简单的模型，假设人在第 1 个最高点 A 点从完全站立的姿势迅速完全下蹲，然后荡至最低点 B，A 与 B 的高度差为 h_1；随后他在 B 点迅速完全站起（且最终径向速度为零），继而随秋千荡至第 2 个最高点 C，这一过程中该人质心运动的轨迹如图所示。此后人以同样的方式回荡，重复前述过程，荡向第 3、4 等最高点。假设人在站起和蹲下的过程中，人与秋千的相互作用力始终与摆杆平行。以最低点 B 为重力势能零点。



（1）假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中没有机械能损失，求该人质心在 $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'\to\mathrm{B}\to\mathrm{B}'\to\mathrm{C}$ 各个阶段的机械能及其变化；

（2）假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中的机械能损失 ΔE 与过程前后高度差的绝对值 Δh 的关系分别为

$$\Delta E = k_1 mg(h_0+\Delta h),\quad 0<k_1<1,\ \text{始终完全蹲下；}$$
$$\Delta E = k_2 mg(h_0'+\Delta h),\quad 0<k_2<1,\ \text{始终完全站立.}$$

这里，k_1、k_2、h_0 和 h_0' 是常量，g 是重力加速度的大小。求

（i）相对于 B 点，第 n 个最高点的高度 h_n 与第 $n+1$ 个最高点的高度 h_{n+1} 之间的关系；

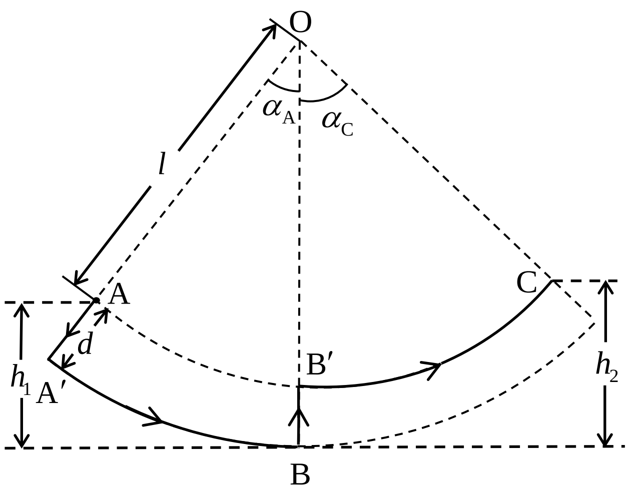
（ii）h_n 与 h_1 之间的关系式和 $h_{n+1}-h_n$ 与 h_1 之间的关系式。

参考解答：

（1）假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中没有机械能损失。将人和秋千作为一个系统。人在 A 处位于完全站立状态，此时系统的机械能为

$$U_{\mathrm{A}} = K_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{A}} = 0 + mg[l(1-\cos\alpha_{\mathrm{A}})+d] = mgh_1 \quad ①$$

式中，$K_{\mathrm{A}}=0$ 和 $V_{\mathrm{A}}=mgh_1$ 分别是人在 A 处时系统的动能和重力势能，α_{A} 是秋千与竖直方向的夹角（以下使用类似记号），如图所示。



人在 A′ 处完全下蹲，在 $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ 过程中系统重力势能减少，（因受到摆底板的限制）动能仍然为零。人在 A′ 处时系统的机械能为

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{A}'} &= K_{\mathrm{A}'} + V_{\mathrm{A}'} = 0 + mg(d+l)(1-\cos\alpha_{\mathrm{A}}) \\ &= mg\frac{l+d}{l}(h_1-d)\end{aligned} \quad ②$$

人在 B 仍处位于完全下蹲状态，在 $\mathrm{A}'\to\mathrm{B}$ 过程中系统机械能守恒。人在 B 处的动能为

$$K_{\mathrm{B1}}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B1}}^2=U_{\mathrm{A}'} \qquad ③$$

式中下标 1 表示秋千第 1 次到 B 处。

人在 B′ 处突然站立，人做功，机械能增加。设人站立前后体系的角动量分别为 L_{B1} 和 $L_{\mathrm{B}'1}$。在 $\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ 过程中系统角动量守恒

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{B1}}&=mv_{\mathrm{B1}}(l+d)=m(l+d)\sqrt{2K_{\mathrm{B1}}/m}\\&=m(l+d)\sqrt{2g\frac{l+d}{l}(h_1-d)}=\\&=L_{\mathrm{B}'1}=mlv_{B'1}\end{aligned} \qquad ④$$

由此得

$$v_{B'1}=\frac{l+d}{l}\sqrt{2g\frac{l+d}{l}(h_1-d)} \qquad ⑤$$

人在 B′ 处的机械能为

$$\begin{aligned}U_{B'1}&=\frac{1}{2}mv_{B1}'^2+mgd\\&=\frac{1}{2}m\cdot 2\left(\frac{l+d}{l}\right)^3g(h_1-d)+mgd\end{aligned} \qquad ⑥$$

人在 C 仍处于完全站立状态，在 $\mathrm{B}'\to\mathrm{C}$ 过程中系统机械能守恒。人在 C 处时系统的机械能为

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{C}}&=mgh_2\\&=mg\frac{(l+d)^3}{l^3}(h_1-d)+mgd=U_{B'1}\end{aligned} \qquad ⑦$$

由⑥⑦式得

$$h_2-d=\left(\frac{l+d}{l}\right)^3(h_1-d)$$

于是

$$U_{\mathrm{C}}-U_{\mathrm{A}}=mg\left[\left(\frac{l+d}{l}\right)^3-1\right](h_1-d) \qquad ⑧$$

（2）（i）考虑在始终完全蹲下和始终完全站立过程中的机械能损失。按题给模型，人第 n 次在 B 处时系统的动能为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}n}^2&=mgh_n'-k_1(mgh_0+mgh_n')\\&=(1-k_1)mgh_n'-k_1mgh_0\\&=(1-k_1)mg\frac{l+d}{l}(h_n-d)-k_1mgh_0\end{aligned} \qquad ⑨$$

即

$$v_{\mathrm{B}n}^2 = 2(1-k_1)g\frac{l+d}{l}(h_n-d)-2k_1gh_0 \qquad ⑨$$

按题给模型，人第 n 次在 B' 处时系统的动能为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}'n}^2 &= mg(h_{n+1}-d)+k_2[mgh_0'+mg(h_{n+1}-d)] \\ &= (1+k_2)mg(h_{n+1}-d)+k_2mgh_0'\end{aligned} \qquad ⑩$$

即

$$v_{\mathrm{B}'n}^2 = 2(1+k_2)g(h_{n+1}-d)+2k_2gh_0' \qquad ⑩$$

在第 n 次 $\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ 过程中，系统角动量守恒，有

$$(l+d)mv_{\mathrm{B}n} = lmv_{\mathrm{B}'n} \qquad ⑪$$

由⑨⑩⑪式得

$$\begin{aligned}&2(1+k_2)l^2g(h_{n+1}-d)+2k_2l^2gh_0' \\ &= 2(1-k_1)(l+d)^2g\frac{l+d}{l}(h_n-d)-2k_1(l+d)^2gh_0\end{aligned} \qquad ⑫$$

由⑫式得

$$\begin{aligned}h_{n+1}-d &= \frac{1-k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^3(h_n-d)-\frac{k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^2h_0-\frac{k_2}{1+k_2}h_0' \\ &= \frac{1-k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^3(h_n-d)-\left[\frac{k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^2h_0+\frac{k_2}{1+k_2}h_0'\right] \\ &= \lambda(h_n-d)-\mu\end{aligned} \qquad ⑬$$

式中

$$\lambda = \frac{1-k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^3 \qquad ⑭$$

$$\mu = \frac{k_1}{1+k_2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^2h_0+\frac{k_2}{1+k_2}h_0' \qquad ⑮$$

（ii）由⑬⑭⑮式有

$$\begin{aligned}h_{n+1}-d &= \lambda(h_n-d)-\mu \\ &= \lambda\left[\lambda(h_{n-1}-d)-\mu\right]-\mu \\ &= \lambda^2(h_{n-1}-d)-\mu(1+\lambda) \\ &= \cdots \\ &= \lambda^n(h_1-d)-\mu(1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}) \\ &= \lambda^n(h_1-d)-\mu\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\end{aligned} \qquad ⑯$$

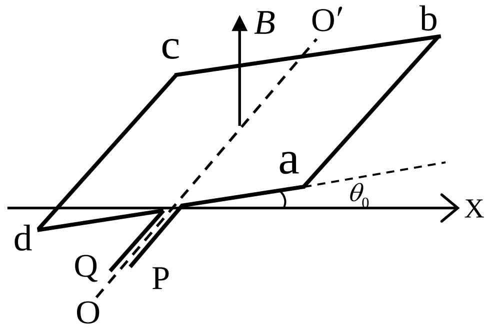
即

$$h_{n+1} = \lambda^n(h_1-d)+d-\mu\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \qquad ⑰$$

于是

$$h_{n+1}-h_n=\lambda^{n-1}[(\lambda-1)(h_1-d)-\mu] \qquad ⑱$$

四、如图，在磁感应强度大小为B、方向竖直向上的匀强磁场中，有一均质刚性导电的正方形线框abcd，线框质量为m，边长为l，总电阻为R。线框可绕通过ad边和bc边中点的光滑轴$\mathrm{OO'}$转动。P、Q点是线框引线的两端，$\mathrm{OO'}$轴和X轴位于同一水平面内，且相互垂直。不考虑线框自感。



（1）求线框绕$\mathrm{OO'}$轴的转动惯量J；

（2）$t=0$时，线框静止，其所在平面与X轴有一很小的夹角θ_0，此时给线框通以大小为I的恒定直流电流，方向沿$\mathrm{P}\to\mathrm{a}\to\mathrm{b}\to\mathrm{c}\to\mathrm{d}\to\mathrm{Q}$，求此后线框所在平面与X轴的夹角$\theta$、线框转动的角速度$\dot{\theta}$和角加速度$\ddot{\theta}$随时间变化的关系式；

（3）$t=t_0>0$时，线框平面恰好逆时针转至水平，此时断开 P、Q 与外电路的连接，此后线框如何运动？求P、Q间电压V_{PQ}随时间变化的关系式；

（4）线框做上述运动一段时间后，当其所在平面与X轴夹角为θ_1（$\frac{\pi}{4}\le\theta_1\le\frac{3\pi}{4}$）时，将P、Q短路，线框再转一小角度$\alpha$后停止，求$\alpha$与$\theta_1$的关系式和$\alpha$的最小值。

参考解答：

（1）线框ab边和cd边绕$\mathrm{OO'}$轴的转动惯量J_{ab}和J_{cd}均为

$$J_{\mathrm{ab}}=J_{\mathrm{cd}}=\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{ml^2}{16}$$

线框ad边和bc边绕$\mathrm{OO'}$轴的转动惯量J_{ad}和J_{bc}均为

$$J_{\mathrm{ad}}=J_{\mathrm{bc}}=2\int_0^{l/2}\frac{m}{4l}r^2dr=\frac{ml^2}{48}$$

线框绕$\mathrm{OO'}$轴的转动惯量J为

$$J=J_{\mathrm{ab}}+J_{\mathrm{cd}}+J_{\mathrm{ad}}+J_{\mathrm{bc}}=\frac{ml^2}{6} \qquad ①$$

（2）当线框中通过电流I时，ab和cd两边受到大小相等、方向分别指向X轴正向和反向的安培力。设线框的ab边转到与X轴的夹角为θ时其角速度为$\dot{\theta}$，角加速度为$\ddot{\theta}$，ab边和cd边的线速度则为$v=\frac{l}{2}\dot{\theta}$，所受安培力大小为$F=BlI$，线框所受力偶矩为

$$M=-2\cdot\frac{l}{2}BlI\sin\theta\approx-Bl^2I\theta \qquad ②$$

式中已利用了小角近似$\sin\theta\approx\theta$，而负号表示力偶矩与线框角位移θ方向相反。根据刚体转动定理，有

$$J\ddot{\theta}=-Bl^2I\theta \qquad ③$$

此方程与单摆的动力学方程在形式上完全一致，所以线框将做简谐运动，可设

$$\theta = \theta_0 \cos\omega t \qquad ④$$

将其代入③式得

$$\omega = l\sqrt{\frac{BI}{J}} = \sqrt{\frac{6BI}{m}} \qquad ⑤$$

于是，角位移θ随时间t而变化的关系式为

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{6BI}{m}}t \qquad ⑥$$

角速度$\dot{\theta}$随时间t而变化的关系式为

$$\dot{\theta} = -\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}\sin\sqrt{\frac{6BI}{m}}t \qquad ⑦$$

角加速度$\ddot{\theta}$随时间t而变化的关系式为

$$\ddot{\theta} = -\theta_0\frac{6BI}{m}\cos\sqrt{\frac{6BI}{m}}t \qquad ⑧$$

由⑥⑦⑧式知，当$t = \bar{t} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{6BI}}$时，$\theta(\bar{t}) = 0$，$\dot{\theta}(\bar{t}) = -\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}$达到反向最大值，$\ddot{\theta}(\bar{t}) = 0$。

可见，线框的运动是以$\theta = 0$为平衡位置、圆频率$\omega = \sqrt{\frac{6BI}{m}}$、周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6BI}}$、振幅为$\theta_0$的简谐运动。

（3）线框在做上述简谐运动的过程中，当在$t = t_0 > 0$时逆时针转至 da 边与 X 轴正向重合，有

$$\theta(t_0) = 0\text{，且}\ \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t_0) = \theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}\text{，} \qquad ⑨$$

此时 P、Q 形成断路，线框内没有电流，不再受到安培力的力矩的作用，线框将保持作角速度为$\dot{\theta}_0$的匀角速转动

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0,\ \ t \ge t_0 \qquad ⑩$$

因为 ab 和 cd 边切割磁力线，线框中产生的感应电动势随时间变化的关系为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2Blv\sin\left[\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}(t-t_0)\right] = 2Bl\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\left[\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}(t-t_0)\right] \\ &= Bl^2\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}\sin\left[\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}(t-t_0)\right]\end{aligned} \qquad ⑪$$

方向沿$\mathrm{P}\to\mathrm{a}\to\mathrm{b}\to\mathrm{c}\to\mathrm{d}\to\mathrm{Q}$。P、Q 间电压$V_{\mathrm{PQ}}$随时间变化的表达式为

$$V_{\mathrm{PQ}} = -Bl^2\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}\sin\left[\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}(t-t_0)\right] \qquad ⑫$$

（4）当 P、Q 短路后，设线框转到某一角位置θ时的角速度为$\dot{\theta}$。由于 ab 和 cd 边切割磁

力线产生的感应电动势为$Bl^2\dot{\theta}\sin\theta$，在线框中产生的电流为$\frac{Bl^2\dot{\theta}}{R}\sin\theta$，ab 和 cd 边受到的安培力大小为$B\left(\frac{Bl^2\dot{\theta}}{R}\right)l\sin\theta=\frac{B^2l^3}{R}\dot{\theta}\sin\theta$，分别指向 X 轴正向和反向，形成的力偶矩为

$$M=-\frac{B^2l^4}{R}\dot{\theta}\sin^2\theta \qquad ⑬$$

设 P、Q 刚短路的时刻为t_1，此时线框还在以⑨式的角速度逆时针转动，其角动量为

$$J\dot{\theta}_0=\frac{ml^2}{6}\theta_0\sqrt{\frac{6BI}{m}}=l^2\theta_0\sqrt{\frac{mBI}{6}} \qquad ⑭$$

由于受到上述力偶矩的作用，线框转动会减慢直至停止。设停止转动时的时刻为t_x，角位置为$\theta_1+\alpha$，此时线框的角动量为 0。根据角动量定理，应有

$$0-J\dot{\theta}_0=\int_{t_1}^{t_x}Mdt\ , \qquad ⑮$$

由此得

$$J\dot{\theta}_0=\int_{t_1}^{t_x}\frac{B^2l^4}{R}\dot{\theta}\sin^2\theta dt=\int_{\theta_1}^{\theta_1+\alpha}\frac{B^2l^4}{R}\sin^2\theta d\theta\approx\frac{B^2l^4}{R}\alpha\sin^2\theta_1 \qquad ⑯$$

式中右端积分已应用了α是小角度的题设条件。由①⑯式得

$$\alpha=\frac{RJ\dot{\theta}_0}{B^2l^4\sin^2\theta_1}=\frac{R\theta_0}{Bl^2\sin^2\theta_1}\sqrt{\frac{mI}{6B}} \qquad ⑰$$

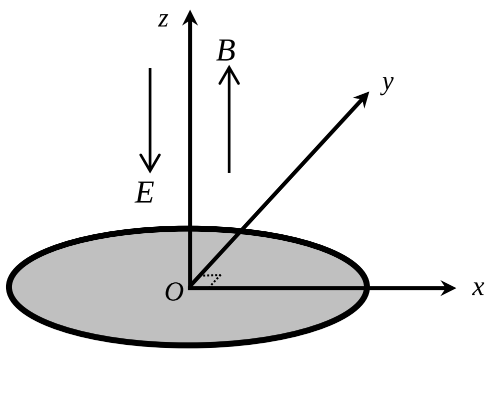
当

$$\theta_1=\frac{\pi}{2} \qquad ⑱$$

时，α达到其最小值$\alpha_{\min}$

$$\alpha_{\min}=\frac{R}{Bl^2}\sqrt{\frac{mI}{6B}}\theta_0 \qquad ⑲$$

五、如图，某圆形薄片材料置于xOy水平面上，圆心位于坐标原点O；xOy平面上方存在大小为E、沿z轴负向的匀强电场，以该圆形材料为底的圆柱体区域内存在大小为B、沿z轴正向的匀强磁场，圆柱体区域外无磁场。从原点O向xOy平面上方的各方向均匀发射电荷量为q、质量为m、速度大小为v的带正电荷的粒子。粒子所受重力的影响可忽略，不考虑粒子间的相互作用。



（1）若粒子每次与材料表面的碰撞为弹性碰撞，且被该电场和磁场束缚在上述圆柱体内的粒子占发射粒子总数的百分比为$\eta=50\%$，求该薄片材料的圆半径R。

（2）若在粒子每次与材料表面碰撞后的瞬间，速度竖直分量反向，水平分量方向不变，竖直方向的速度大小和水平方向的速度大小均按同比例减小，以至于动能减小 10%。

（i）求在粒子射出直至它第一次与材料表面发生碰撞的过程中，粒子在 xOy 平面上的投影点走过路程的最大值；

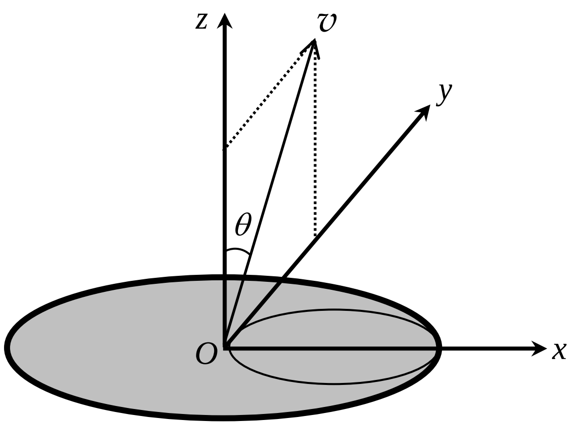
（ii）对（i）问中投影点走过路程最大的粒子，求该粒子从发射直至最终动能耗尽而沉积于材料表面的过程中走过的路程。

已知 $\int du\sqrt{1+u^2}=\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C$，$C$ 为积分常数。

参考解答：

（1）由于本问题在 xOy 平面上具有以圆点为中心的圆对称性，不妨设某一带正电荷的粒子的速度为

$$(0,v\sin\theta,v\cos\theta)$$



被电场和磁场束缚的粒子将在以材料表面为底的圆柱形区域内做 z 方向的螺旋运动（即在 xOy 平面做匀速圆周运动，在 z 方向做匀变速直线运动）。

粒子在 xOy 平面内的投影做匀速圆周运动的半径为

$$r(\theta)=\frac{mv\sin\theta}{qB} \qquad ①$$

若该粒子能被该电场和磁场束缚在以圆形材料为底的圆柱形区域内，则有

$$r(\theta)\le\frac{R_0}{2} \qquad ②$$

假设被电场和磁场束缚住的粒子的发射方向均匀分布在以 z 轴为对称轴的立体角 $\Delta\Omega$: $0\le\theta\le\Theta,\ 0\le\phi\le 2\pi$ 内，这一立体角对应半径为一个长度单位的球面的面积（即立体角的值 $\Delta\Omega$）为

$$\Delta\Omega=-2\pi\int_0^{\Theta}d\cos\theta=2\pi(1-\cos\Theta) \qquad ③$$

从原点 O 向 xOy 平面上方各方向均匀发射的带正电荷的粒子所占的立体角为 2π。按题意，被该电场和磁场束缚的粒子占发射粒子总数的百分比 η 为

$$\eta=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=50\% \qquad ④$$

由③④式得

$$\theta \le \Theta = \frac{\pi}{3} \qquad ⑤$$

可见，只要粒子速度方向与 z 轴的夹角 θ 满足条件⑤式，它就必然会被电场和磁场束缚住。

由①②③④⑤式可知

$$R = \frac{\sqrt{3}mv}{qB} \qquad ⑥$$

（2）（i）带正电荷的粒子在磁场和电场区域做螺旋运动，由①式得，粒子在 xOy 平面的投影点做一次圆周运动的时间为

$$T = \frac{2\pi r}{v\sin\theta} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad ⑦$$

粒子在 z 方向做匀变速直线运动，以粒子发射时刻为计时零点，设粒子第一次与材料表面碰撞前的瞬间为时刻 $t_1(\theta)$，由运动学公式有

$$v\cos\theta - a\frac{t_1(\theta)}{2} = 0 \qquad ⑧$$

式中

$$a = \frac{qE}{m} \qquad ⑨$$

由⑧⑨式得

$$t_1(\theta) = \frac{2mv\cos\theta}{qE} \qquad ⑩$$

粒子在 xOy 平面的投影点做一次圆周运动的路程为

$$d(\theta) = 2\pi r(\theta) = \frac{2\pi mv\sin\theta}{qB} \qquad ⑪$$

粒子在 xOy 平面的投影点在 t_1 时间走过的总路程 $s_{z=0}(\theta)$ 为

$$s_{z=0}(\theta) = \frac{t_1(\theta)}{T}d(\theta) = \frac{mv^2}{qE}\sin 2\theta \qquad ⑫$$

当

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad ⑬$$

时，$s_{z=0}$ 最大

$$s_{z=0}^{\max} = s_{z=0}(\theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{mv^2}{qE} \qquad ⑭$$

（ii）若粒子的投影在 xOy 平面上走过的总路程恰好达到最大值，则 θ 的取值如⑬式所示。

粒子在 z 方向做匀减速直线运动，在 xOy 平面上做匀速圆周运动，以粒子发射时刻为计时

零点，粒子在发射后时刻t的合速度大小为

$$v_{合}=\sqrt{(v\sin\frac{\pi}{4})^2+(v\cos\frac{\pi}{4}-at)^2} \quad ⑮$$

该粒子从发射到第一次与材料表面碰撞前的瞬间运动的路程为

$$s_1=2\int_0^{t_1(\theta=\pi/4)/2} dt v_{合}=\frac{mv^2}{qE}\int_0^1 du\sqrt{1+u^2} \quad ⑯$$

已利用⑩⑮式。利用题给积分公式，由⑯式得

$$s_1=\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{qE}\frac{1}{2}mv^2 \quad ⑰$$

它与粒子发射时的动能成正比。

粒子每一次与材料表面碰撞前后，z方向速度反向，而沿xOy平面的速度方向不变，且沿z方向的速度和沿xOy平面的速度都按同样比例减小；以至于动能减小10%，粒子再次出射的出射角大小不变。粒子按照同样的规律运动下去，其第n次发射到与材料表面碰撞前的瞬间走过的路程s_n为

$$s_n=k^{n-1}s_1,\quad k=1-10\% \quad ⑱$$

最终其动能耗尽（沉积到材料表面）。利用⑱式，粒子从发射直至最终动能耗尽而沉积于材料表面的过程中运动的总路程$s_{总}$为

$$\begin{aligned}s_{总}&=s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots\\&=(1+k+\cdots+k^{n-1}+\cdots)s_1\\&=\frac{s_1}{1-k}=10s_1\end{aligned} \quad ⑲$$

由⑰⑲式得

$$s_{总}=[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]\frac{5mv^2}{qE} \quad ⑳$$

六、有一根长为6.00cm、内外半径分别为0.500mm和5.00mm的玻璃毛细管。

（1）毛细管竖直悬空固定放置，注入水后，在管的下端中央形成一悬挂的水滴，管中水柱表面中心相对于水滴底部的高度为3.50cm，求水滴底部表面的曲率半径a；

（2）若将该毛细管长度的三分之一竖直浸入水中，问需要多大向上的力才能使该毛细管保持不动？

已知玻璃的密度是水的 2 倍，水的密度为$1.00\times10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，水的表面张力系数为$7.27\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，水与玻璃的接触角$\theta$可视为零，重力加速度取$9.80\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$。

参考解答：

（1）设大气压强为P_0，毛细管的内径为r，外径为R，水的密度为ρ_0，表面张力系数为σ，重力加速度为g。对于水柱的上端，水与管壁完全浸润，接触角为零$\theta=0$，水柱上端内表面压强P_1为

$$P_1 = P_0 - \frac{2\sigma}{r} \qquad ①$$

对于水柱下端，同理可知，表面压强P_2为

$$P_2 = P_0 + \frac{2\sigma}{a} \qquad ②$$

水柱平衡时有

$$P_2 = P_1 + \rho_0 gh \qquad ③$$

由①②③式得

$$a = \frac{2\sigma r}{\rho_0 ghr - 2\sigma} \qquad ④$$

由④式和题给数据得

$$a = 2.79\times10^{-3}\mathrm{m} \qquad ⑤$$

（2）将该毛细管长度的三分之一竖直浸入水中后，设管内水柱顶部与管外水平的水面高度差为h_1，由平衡条件得

$$\rho_0 \cdot \pi r^2 h_1 g = 2\pi r \cdot \sigma \qquad ⑥$$

即

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho_0 gr}$$

由上式和题给数据得

$$h_1 = 2.97\mathrm{cm} < 4.00\mathrm{cm} \qquad ⑦$$

毛细管内壁所受的附着力F_1大小等于管外水平的水面以上管内水柱的重力大小G_1，即

$$F_1 = G_1 = \rho_0 g\pi r^2 h_1 \qquad ⑧$$

方向向下。玻璃管外壁所受的附着力F_2大小为

$$F_2 = \sigma 2\pi R \qquad ⑨$$

方向向下。设玻璃管长度为h，玻璃管所受的重力大小为

$$G = 2\rho_0 g\pi(R^2 - r^2)h \qquad ⑩$$

方向向下。玻璃管所受到的浮力大小 F_0 为

$$F_0=\frac{1}{3}h\rho_0 g\pi(R^2-r^2) \qquad ⑪$$

方向向上。设向上的拉力大小为 F ，由力平衡条件得

$$F=G+G_1+F_2-F_0 \qquad ⑫$$

由⑦⑧⑨⑩⑪⑫式得

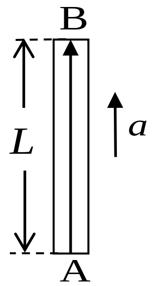
$$\begin{aligned}F&=\rho g\pi(R^2-r^2)h+\rho_0 g\pi r^2 h_1+\sigma 2\pi R-\frac{1}{3}\rho_0 g\pi(R^2-r^2)h\\&=\frac{5}{3}\rho_0 g\pi h(R^2-r^2)+2\pi\sigma(R+r)\end{aligned} \qquad ⑬$$

由⑬式和题给数据得

$$F=7.87\times10^{-2}\,\mathrm{N} \qquad ⑭$$

七、（1）爱因斯坦等效原理可表述为：在有引力作用的情况下的物理规律和没有引力但有适当加速度的参考系中的物理规律是相同的。作为一个例子，考察下面两种情况：

（i）当一束光从引力势比较低的地方传播到引力势比较高的地方时，其波长变长，这个现象称为引力红移。如果在某质量分布均匀的球形星体表面附近的 A 处竖直向上发射波长为 λ_0 的光，在 A 处竖直上方高度为 L 的 B 处放置一固定接收器，求 B 处接收器接收到的光的波长 λ' 。已知该星体质量为 M ，半径为 R （ $R>>L$ ）；引力场满足弱场条件，可应用牛顿引力理论；真空中的光速为 c ，引力常量为 G 。



（ii）如图，假设在没有引力的情况下，有一个长度为 L 的箱子，在箱子上、下面的 B 、A 两处分别放置激光接收器和激光发射器。在 $t=0$ 时刻，箱子从初速度为零开始，沿 AB 方向做加速度大小为 a 的匀加速运动（ $aL<<c^2$ ），同时从 A 处发出一束波长为 λ_0 的激光。根据狭义相对论，求 B 处接收器接收到的激光的波长 λ'' 。

（iii）根据等效原理，试比较（i）和（ii）的结果，要使物理规律在（i）和（ii）中的情况下相同，则（ii）中的 a 应为多大？

（2）引力红移现象的第一个实验验证是在地球表面附近利用穆斯堡尔探测器完成的，穆斯堡尔探测器能以极高的精度分辨伽马光子的能量。按第（1）（i）问，在地球表面附近，A 处放置一个静止的伽马辐射源，辐射的伽马光子的频率为 ν_0 ；B 处放置一个穆斯堡尔探测器，假设该探测器在相对于自身静止的参考系中仅能探测到频率为 ν_0 的伽马光子。为了探测到从 A 处发射的伽马光子，该穆斯堡尔探测器需要某一竖直向下的运动速度。1960-1964 年期间，庞德、雷布卡和斯奈德利用美国哈佛大学杰弗逊物理实验室的高塔多次做了这个实验，实验中 $L=22.6\mathrm{m}$ 。试问：A 处发射的伽马光子被探测到时，该穆斯堡尔探测器的运动速度为多大？已知地球表面重力加速度 $g=9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ ，真空中的光速 $c=3.00\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 。

参考解答：

（1）（i）对于能量为$\frac{hc}{\lambda_0}$的光子，根据质能关系有

$$\frac{hc}{\lambda_0}=mc^2 \quad ①$$

式中，m是该光子的等效质量。设在星球的引力场中，星球表面的重力加速度为g'，根据万有引力定律有

$$g'=\frac{GM}{R^2} \quad ②$$

由能量守恒知，光子在A、B两点的能量相等，即

$$\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{hc}{\lambda'}+mg'L \quad ③$$

由①③式得

$$\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{\lambda_0}(1-\frac{g'L}{c^2}) \quad ④$$

由④式解得

$$\lambda'=\lambda_0\frac{1}{1-\frac{g'L}{c^2}}\approx\lambda_0(1+\frac{g'L}{c^2}) \quad ⑤$$

将②式代入⑤式得

$$\lambda'\approx\lambda_0(1+\frac{GM}{R^2}\frac{L}{c^2}) \quad ⑥$$

（ii）光在真空中的速度大小c与发射器的运动状态无关。设A发出的光以光速c射向接收器B直至到达B的运动过程需要的时间为t，有

$$ct=L+\frac{1}{2}at^2 \quad ⑦$$

设接收器B接收到激光时相对于地面的速度为

$$v=at \quad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$v\approx\frac{aL}{c} \quad ⑨$$

已略去$\frac{aL}{c^2}$的高阶小量。按照多普勒频移公式，B点接收到的光的波长λ''满足

$$\frac{c}{\lambda''}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\frac{c}{\lambda_0} \quad ⑩$$

式中

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{aL}{c^2} \quad ⑪$$

由于$\beta<<1$，有

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}=\sqrt{1-\frac{2\beta}{1+\beta}}\approx 1-\frac{\beta}{1+\beta}=\frac{1}{1+\beta} \qquad ⑫$$

将⑪⑫式代入⑩式得，B 点的接收器收到的激光波长为

$$\lambda''=\lambda_0(1+a\frac{L}{c^2}) \qquad ⑬$$

（iii）根据等效性原理，若将在（i）和（ii）中所计算的 B 点接收器收到的激光的波长 λ' 和 λ'' 视为同一事件，⑥式和⑬式便应表达相同的物理规律；比较（i）和（ii）的结果有

$$a=\frac{GM}{R^2} \qquad ⑭$$

（2）在地球表面，重力加速度大小为 g，用 g 代替④式中的 g' 得，B 点接收到的光子的频率 ν' 为

$$\nu'=\nu_0(1-\frac{gL}{c^2}) \qquad ⑮$$

由⑮式得，地球重力作用造成的光子频移为

$$\Delta\nu=\nu'-\nu_0=-\nu_0\frac{gL}{c^2}$$

可见，重力作用造成的频率减小了 $\nu_0\frac{gL}{c^2}$（红移），需要由穆斯堡尔探测器的相对于地面的运动来进行补偿，以便用穆斯堡尔探测器能探测到该光子。设穆斯堡尔探测器相对于地面沿 BA 方向运动的速度为 v 时，穆斯堡尔探测器能探测到的光子的频率。按照多普勒频移公式有

$$\nu_0=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu' \qquad ⑯$$

由⑫⑯式可知

$$\nu'=\frac{\nu_0}{1+\beta}\approx\nu_0(1-\frac{v}{c}) \qquad ⑰$$

由⑮⑰式得

$$\frac{gL}{c^2}=\frac{v}{c} \qquad ⑱$$

即

$$v=\frac{gL}{c} \qquad ⑲$$

由⑲式和题给数据得

$$v=\frac{9.81\times 22.6}{3.00\times 10^8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}=7.39\times 10^{-7}\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad ⑳$$

八、用薄膜制备技术在某均质硅基片上沉积一层均匀等厚氮化镓薄膜，制备出一个硅基氮化镓样品，如图 I 所示。

图 I

（1）当用波长范围为 $450\sim1200\,\mathrm{nm}$ 的光垂直均匀照射该样品氮化镓表面，观察到其反射光谱仅有两种波长的光获得最大相干加强，其中之一波长为 $600\,\mathrm{nm}$；氮化镓的折射率 n 与入射光在真空中波长 λ（单位 nm）之间的关系（色散关系）为

$$n^2=2.26^2+\frac{330.1^2}{\lambda^2-265.7^2}$$

硅的折射率随波长在 $3.49\sim5.49$ 范围内变化。只考虑氮化镓表面和氮化镓-硅基片界面的反射，求氮化镓薄膜的厚度 d 和另一种获得最大相干加强光的波长。

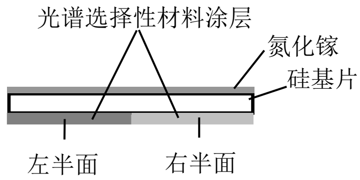


图 II

（2）在该样品硅基片的另一面左、右对称的两个半面上分别均匀沉积一光谱选择性材料涂层，如图 II 所示；对某种特定波长的光，左半面涂层全吸收，右半面全反射。用两根长均为 a 的轻细线竖直悬挂该样品，样品长为 a、宽为 b，可绕过其中心的光滑竖直固定轴 $\mathrm{OO'}$ 转动，也可上下移动，如图 III 所示。开始时，样品静止，用上述特定波长的强激光持续均匀垂直照射该样品涂层表面。此后保持激光方向始终不变，样品绕 $\mathrm{OO'}$ 轴转动直至稳定。涂层表面始终被激光完全照射。不计激光对样品侧面的照射。设硅基片厚度为 d'、密度为 ρ'，氮化镓薄膜的厚度为 d、密度为 ρ，涂层质量可忽略，真空的介电常量 ε_0，重力加速度大小为 g。若样品稳定后相对于光照前原位形的转角为 α，求所用强激光的电场强度有效值 E。

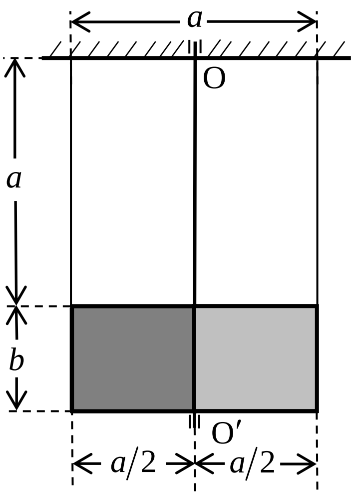


图 III

(3)取 $E=5.00\times10^4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$, $d'=3.00\times10^{-4}\,\mathrm{m}$, $\rho'=2.33\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\rho=6.10\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$, $g=9.80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求 α 的值。

参考解答：

（1）已知入射光的波长范围为 $450-1200\ \mathrm{nm}$，由色散关系可得到折射率范围

$$2.278 \le n \le 2.436$$

可见，氮化镓的折射率小于硅的折射率，在空气-氮化镓和氮化镓-硅界面处均要考虑半波损失，但对于两界面反射光的干涉不需要考虑半波损失。

设对于波长为600nm的入射光，薄膜的折射率为n_1；对于波长λ的入射光，薄膜的折射率为n。对于波长为600nm的入射光，光经厚度为d的氮化镓薄膜的前、后面反射后，在表面相遇，相干加强条件为

$$2n_1 d = k_1 \lambda_1 \qquad (k_1 = 1, 2, \cdots) \qquad ①$$

同理，对于波长λ的入射光，相干加强的条件有为

$$2nd = k\lambda \qquad (k = 1, 2, \cdots) \qquad ②$$

由①②式有

$$\frac{k_1}{k}\frac{n}{n_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \text{或} \quad \frac{k_1}{k} = \frac{n_1}{n}\frac{\lambda}{\lambda_1} \qquad ③$$

由③式，根据题意，设λ'和λ''分别对应450nm和1200nm的入射光波长，薄膜相应的折射率分别为n'和n''，根据题给色散关系得

$$n_1(600nm) \approx 2.342, \quad n'(450nm) \approx 2.436, \quad n''(1200nm) \approx 2.278 \qquad ④$$

由④式有

$$\frac{k_1}{k'} = \frac{n_1(600)}{n'(450)}\frac{450}{600} \approx 0.721, \quad \frac{k_1}{k''} = \frac{n_1(600)}{n''(1200)}\frac{1200}{600} \approx 2.056 \qquad ⑤$$

由⑤式和题意得

$$\frac{k_1}{k'} < \frac{k_1}{k} < \frac{k_1}{k''} \qquad ⑥$$

由⑥式和题给条件知仅有

$$k_1 = 2, \ \ k = 1 \qquad ⑦$$

符合条件。由④⑦式代入①式得

$$d \approx 256\text{nm} \qquad ⑧$$

将⑦⑧式代入②式得

$$\frac{\lambda}{n} \approx 512.38 \qquad ⑨$$

由题给色散关系式和⑨式得

$$2.41n^4 - 12.97n^2 + 2.32 = 0$$

或

$$2.41\left(\frac{\lambda}{512.38}\right)^4-12.97\left(\frac{\lambda}{512.38}\right)^2+2.32=0$$

由此方程解得

$$\lambda=1168\text{nm} \qquad ⑩$$

另一解 $\lambda=220\text{nm}$ 不在题给波长范围内，舍去。

（2）设频率为 ν 的单色光，每秒垂直入射到物体表面每平方米上的光子数为 N 。每个光子传给物体的动量为 $\frac{h\nu}{c}$ （h 为普朗克常量，c 是真空中的光速），若入射光子全被物体吸收，则该表面每平方米在每秒内所获得的动量即光压 P_0 为

$$P_0=N\frac{h\nu}{c}$$

每个光子传给物体的能量为 $h\nu$ ，每秒垂直入射到全吸收物体表面每平方米上的能量为

$$Nh\nu=\bar{w}c$$

式中 $\bar{w}$ 为电磁波平均能量密度

$$\bar{w}=\varepsilon_0E^2$$

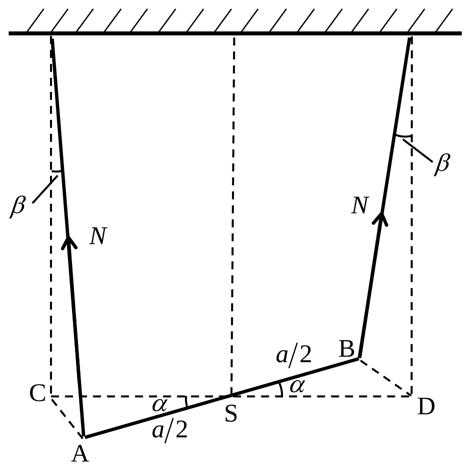
由以上三式得，频率为 ν 的单色光正入射到全吸收表面时对该表面的光压 P_0 为

$$P_0=\bar{w}=\varepsilon_0E^2 \qquad ⑪$$

辐射压强对样品的合力矩为

$$\begin{aligned}L_p&=(2P_0\cdot\frac{ab}{2}\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{a}{4}\cdot\cos\alpha-\left(P_0\cdot\frac{ab}{2}\cdot\cos\alpha\right)\cdot\frac{a}{4}\cdot\cos\alpha\\&=P_0\cdot\frac{a^2b}{8}\cdot\cos^2\alpha\end{aligned} \qquad ⑫$$

如图，由几何关系可知



$$AC=a\sin\frac{\alpha}{2}$$

由此得

$$\beta=\frac{\alpha}{2} \qquad ⑬$$

样品在竖直方向受力平衡

$$2N\cos\beta=Mg \qquad ⑭$$

式中 N 为细绳的拉力， M 为基片质量 m' 和氮化镓薄膜质量 m 的和

$$M=m'+m=\left(\rho'd'+\rho d\right)ab \qquad ⑮$$

轻细线拉力 N 提供给样品转矩为

$$L_N = 2\left(N\sin\beta\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad ⑯$$

根据样品所受力矩平衡条件

$$L_N = L_p$$

将⑬⑭⑮⑯式代入上式得

$$\left(\rho' d' + \rho d\right)ab\cdot g\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = P_0\cdot\frac{a^2 b}{8}\cdot\cos^2\alpha \qquad ⑰$$

由⑪⑰式得

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4\left(\rho' d' + \rho d\right)g}$$

即

$$E = 2\left[\frac{\left(\rho' d' + \rho d\right)g}{\varepsilon_0}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}\right]^{1/2} \qquad ⑱$$

（3）将题给数据代入⑱式得

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} = 8.12\times10^{-4} \qquad ⑲$$

考虑到⑲式右边很小，α 也很小。由⑲式和小角度近似 $\sin\alpha\approx\alpha$ 与 $\cos\alpha\approx1$，得

$$\alpha\approx1.62\times10^{-3}\ \text{rad} \qquad ⑳$$