第 30 届全国中学生物理竞赛决赛考试试题、解答与评分标准

2013 年 10 月 26 日

一、（15 分） 一质量为 m 的小球在距水平地面 h 高处以水平速度 $\sqrt{2gh}$ 抛出，空气阻力不计. 小球每次落地反弹时水平速度不变，竖直速度大小按同样的比率减小. 若自第一次反弹开始小球的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积总和为 $\frac{8}{21}h^2$，求小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量.

提示：小球每次做斜抛运动（从水平地面射出又落至地面）的轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积等于其最大高度和水平射程乘积的 $\frac{2}{3}$.

参考解答:

设小球每次落地反弹时，反弹后的竖直速度大小是反弹前的 λ 倍. 第一次落地时竖直速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

第一次反弹竖直速度大小为

$$v_1 = \lambda\sqrt{2gh}, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{2}$$

第一次反弹高度为

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \lambda^2 h\,. \tag{3}$$

第一次反弹后飞行时间为

$$t_1 = 2\frac{v_1}{g} = 2\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{4}$$

第一次反弹至第二次反弹时水平方向的位移为

$$x_1 = \sqrt{2gh}\,t_1 = 4\lambda h\,. \tag{5}$$

小球在第一次反弹至第二次反弹之间的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积为

$$S_1 = \frac{2}{3}h_1 x_1 = \frac{8}{3}\lambda^3 h^2\,. \tag{6}$$

设第 n 次反弹后至 $n+1$ 次反弹前的最大竖直速度大小和上升的最大高度分别为 v_n 和 h_n. 由题意和上述论证知

$$v_{n+1} = \lambda v_n\,, \tag{7}$$

$$h_{n+1} = \lambda^2 h_n\,, \tag{8}$$

$$t_{n+1} = \lambda t_n\,, \tag{9}$$

$$x_{n+1} = \lambda x_n\,, \tag{10}$$

$$S_{n+1} = \lambda^3 S_n\,. \tag{11}$$

$S_1, S_2, \cdots$ 构成一无穷递缩等比数列，其总和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1(1+\lambda^3+\lambda^6+\cdots) = \frac{S_1}{1-\lambda^3} = \frac{8}{21}h^2 \tag{12}$$

由(6)、(12)式有

$$\lambda = \frac{1}{2} \tag{13}$$

设 I_n 表示小球在第 n（$n \ge 1$）次碰撞过程中小球受到的作用力的冲量，由动量定理有

$$I_n = mv_n - m(-v_{n-1}) = m(1+\lambda)v_{n-1} \tag{14}$$

由于小球每次反弹前后速度的水平分量不变，小球每次碰撞过程中受到的沿水平方向的冲量为零. 小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量为

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}I_n=(mv_0)(1+\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\cdots)=mv_0\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \tag{15}$$

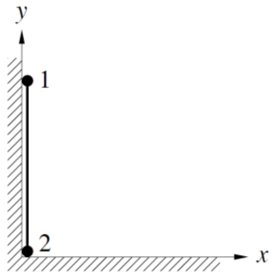
方向向上. 将(13)式代入(15)式得

$$I=3mv_0=3m\sqrt{2gh} \tag{16}$$

评分标准：本题 15 分.

(1)至(6)式各 1 分，(11)式 4 分，(12)至(16)式各 1 分.

二、（15 分） 质量均为m的小球 1 和 2 由一质量可忽略、长度为l的刚性轻杆连接，竖直地靠在墙角，小球 1 在杆的上端，如图所示. 假设墙和地面都是光滑的. 初始时给小球 2 一个微小的向右初速度. 问在系统运动过程中，当杆与竖直墙面之间的夹角等于何值时，小球 1 开始离开竖直墙面？

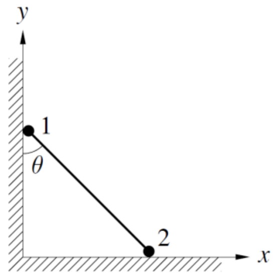


参考解答：如图，在小球 1 未离开竖直墙面之前，杆与竖直墙面之间夹角为θ时，小球 1 的坐标为

$$x_1=0,\ y_1=l\cos\theta, \tag{1}$$

小球 2 的坐标为

$$x_2=l\sin\theta,\ y_2=0\,. \tag{2}$$



小球 1 的速度为

$$v_{1x}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=0,\ v_{1y}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=-\omega l\sin\theta, \tag{3}$$

式中$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$是杆的转动角速度. 小球 2 的速度为

$$v_{2x}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\omega l\cos\theta,\ v_{2y}=\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=0\,. \tag{4}$$

由机械能守恒，有

$$mgl=\frac{1}{2}m\left(v_{1x}^2+v_{1y}^2\right)+\frac{1}{2}m\left(v_{2x}^2+v_{2y}^2\right)+mgl\cos\theta=\frac{1}{2}ml^2\omega^2+mgl\cos\theta\,. \tag{5}$$

由上式得

$$\omega=\sqrt{\frac{2g\left(1-\cos\theta\right)}{l}}\,. \tag{6}$$

这里考虑到随着时间t的增加，θ变大，因此$\omega>0$，从而舍去负根.

系统质心c的x坐标为

$$x_c=\frac{mx_1+mx_2}{2m}=\frac{1}{2}l\sin\theta\,. \tag{7}$$

质心速度的x分量为

$$v_{cx}=\frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\omega l\cos\theta\,. \tag{8}$$

质心加速度的x分量为

$$a_{cx}=\frac{\mathrm{d}v_{cx}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\omega^2 l\sin\theta+\frac{1}{2}l\cos\theta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,. \tag{9}$$

由(6)式得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\omega\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l\left(1-\cos\theta\right)}}=\frac{g}{l}\sin\theta\,. \tag{10}$$

在得到上述结果时又利用了(6)式. 把(6)、(10)式代入(9)式，得

$$a_{cx}=\frac{\mathrm{d}v_{cx}}{\mathrm{d}t}=-g\sin\theta\left(1-\cos\theta\right)+\frac{1}{2}g\sin\theta\cos\theta=g\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta-1\right). \tag{11}$$

设竖直墙面对小球 1 的正压力为T，质心c在x方向的运动满足

$$T=2ma_{cx}\,. \tag{12}$$

由(12)式可知，当$a_{cx}=0$时，

$$T=0\,, \tag{13}$$

小球 1 开始离开竖直墙面. 由(11)式得，小球 1 开始离开竖直墙面时，夹角θ满足方程

$$\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right) = 0. \tag{14}$$

方程(13)的一个解满足$\sin\theta = 0$，故$\theta = 0$，此角度对应初始位置；方程(13)的另一个解满足$\frac{3}{2}\cos\theta - 1 = 0$，故

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}. \tag{15}$$

此即小球 1 开始离开竖直墙面时杆与竖直墙面之间的夹角.

评分标准：本题 15 分. (1)至(15)式各 1 分.

三、（25 分）太空中有一飞行器靠其自身动力维持在地球赤道的正上方$L = \alpha R_e$处，相对于赤道上的一地面物资供应站保持静止. 这里，R_e为地球的半径，α为常数，$\alpha > \alpha_m$，而

$$\alpha_m = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/3} - 1,$$

M_e和ω_e分别为地球的质量和自转角速度，G为引力常数. 设想从供应站到飞行器有一根用于运送物资的刚性、管壁匀质、质量为m_p的竖直输送管，输送管下端固定在地面上，并设法保持输送管与地面始终垂直. 推送物资时，把物资放进输送管下端内的平底托盘上，沿管壁向上推进，并保持托盘运行速度不致过大. 忽略托盘与管壁之间的摩擦力，考虑地球的自转，但不考虑地球的公转. 设某次所推送物资和托盘的总质量为m.

1. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中，地球引力和惯性离心力做的功分别是多少？
2. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中，外推力至少需要做多少正功？
3. 当飞行器离地面的高度（记为L_0）为多少时，在把物资送到飞行器的过程中，地球引力和惯性离心力所做功的和为零？
4. 如果通过适当控制飞行器的动力，使飞行器在不输送物资时对输送管的作用力恒为零，在不输送物资的情况下，计算当飞行器离地面的高度为$L = \alpha R_e$（$\alpha > \alpha_m$）时，地面供应站对输送管的作用力；并对$L > L_0$、$L = L_0$、$\alpha_m R_e < L < L_0$三种情形，分别给出供应站对输送管作用力的大小和方向.

参考解答：

1. 当物资（包括托盘，以下类似）m距地心r处时，物资m与地球系统的引力势能U_G和物资m受到的由于地球自转引起的惯性离心力F_L分别为

$$U_G = -\frac{GM_e m}{r},\ F_L = m\omega_e^2 r. \tag{1}$$

这里已取由地心向外的方向为力的正向. 先计算地球引力对物资m所做的功. 当物资m分别在供应站和飞行器处时，物资m与地球系统的引力势能为

$$U_G(R_e) = -\frac{GM_e m}{R_e},\ U_G(L+R_e) = -\frac{GM_e m}{L+R_e} = -\frac{GM_e m}{(\alpha+1)R_e}. \tag{2}$$

由功能原理，地球引力对物资m所做的功为

$$W_G = U_G(R_e) - U_G(L+R_e) = -\frac{GM_e m}{R_e}\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right) = -\frac{\alpha GM_e m}{(\alpha+1)R_e}. \tag{3}$$

再计算惯性离心力对物资m所做的功W_L. 由于惯性离心力与r成正比，可用物资在供应站处的惯性离心力和物资在飞行器处的惯性离心力的平均值来计算惯性离心力的功. 于是

$$W_L = \frac{1}{2}\left[F_L(R_e) + F_L(L+R_e)\right]L = \frac{1}{2}m\omega_e^2\left[R_e + (L+R_e)\right]L = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+2)m\omega_e^2 R_e^2. \tag{4}$$

2. 物资离开供应站后，地球吸引力变小而惯性离心力变大. 当惯性离心力大于地球吸引力时，就不再需要推动物资做功了. 因此,需要外力做正功的路程为从出发点到地球吸引力等于惯性离心力之处. 令 r_0 为地球吸引力等于惯性离心力之处到地心的距离，则有

$$\frac{GM_e m}{r_0^2} = m\omega_e^2 r_0 ,$$

或

$$r_0 = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2}\right)^{1/3} . \tag{5}$$

物资到 r_0 处时，地球引力所做的功为

$$W_G\left(r_0\right) = U_G\left(R_e\right) - U_G\left(r_0\right) = -\frac{GM_e m}{R_e} + \frac{GM_e m}{r_0} = -\frac{GM_e m}{R_e}\left(1 - \frac{R_e}{r_0}\right), \tag{6}$$

惯性离心力所做的功为

$$W_L\left(r_0\right) = \frac{1}{2}\left[F_L\left(r_0\right) + F_L\left(R_e\right)\right]\left(r_0 - R_e\right) = \frac{1}{2}m\omega_e^2\left(r_0^2 - R_e^2\right). \tag{7}$$

因此，为了把物资从供应站推送到飞行器，外推力至少需要做的正功为

$$W_{\min} = -\left[W_G\left(r_0\right) + W_L\left(r_0\right)\right] = \frac{GM_e m}{R_e}\left(1 - \frac{R_e}{r_0}\right) - \frac{1}{2}m\omega_e^2\left(r_0^2 - R_e^2\right)$$

$$= \frac{GM_e m}{R_e}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{R_e}{r_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_e}{r_0}\right)^3\right] > 0.$$

这里，利用了(5)式. 再将(5)式代入上式得

$$W_{\min} = \frac{GM_e m}{R_e} + \frac{1}{2}m\omega_e^2 R_e^2 - \frac{3}{2}m\left(GM_e\omega_e\right)^{2/3}. \tag{8}$$

3. 令(3)式和(4)式之和等于零，则有

$$-\frac{\alpha GM_e m}{\left(\alpha+1\right)R_e} + \frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+2\right)m\omega_e^2 R_e^2 = 0 ,$$

即

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2\left(1 - \frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right) = 0 , \tag{9}$$

其解为

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2}\left[-3 \pm \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/2}\right]. \tag{10}$$

舍去 α 的负根并令

$$\alpha_0 \equiv \alpha_+ = \frac{1}{2}\left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/2}\right], \tag{11}$$

则飞行器到地面的距离为

$$L_0 = \alpha_0 R_e = \frac{R_e}{2}\left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/2}\right]. \tag{12}$$

4. 为求供应站对输送管的作用力，先计算在输送管向下运动无限小距离 Δl 过程中，地球引力、惯性离心力、地面供应站对输送管作用力所做的功. 由于输送管处于平衡状态，因此这三个力对任何无限小位移所做功的和为零. 为计算地球引力、惯性离心力所做的功，可以把输送管向下运动无限小距离 Δl 想象成输送管最上面无限小的一段 Δl （质量为 $\Delta m = m_p \Delta l / L$ ）无限缓慢地移动到最下面. 在此过程中地球引力和惯性离心力所做的功可从类似于上面(3)式和(4)式中的结果求出. 这一无限小的一段 Δl 在距地心 r 处时，地球引力势能和惯性离心力分别为

$$U_G=-\frac{GM_e\Delta m}{r}=-\frac{GM_e m_p\Delta l}{Lr},\ F_L=\Delta m\omega_e^2 r=\frac{1}{L}m_p\omega_e^2 r\,\Delta l\,. \tag{13}$$

在输送管最上面无限小的一段Δl无限缓慢地移动到最下面的过程中，地球引力所做的功为

$$\Delta W_G=U_G\left(L+R_e\right)-U_G\left(R_e\right)=\frac{GM_e m_p}{LR_e}\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)\Delta l=\frac{GM_e m_p}{\left(\alpha+1\right)R_e^2}\Delta l\,, \tag{14}$$

惯性离心力所做的功为

$$\Delta W_L=-\frac{1}{2}\left[F_L\left(R_e\right)+F_L\left(L+R_e\right)\right]L=-\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_p\omega_e^2 R_e\Delta l\,. \tag{15}$$

取供应站对输送管的作用力$\boldsymbol{F}_{\text{base}}$向下为正向. 在输送管向下运动无限小距离$\Delta l$过程中，$\boldsymbol{F}_{\text{base}}$所做的功为

$$\Delta W_{\text{base}}=F_{\text{base}}\Delta l\,. \tag{16}$$

由$\Delta W_G+\Delta W_L+\Delta W_{\text{base}}=0$，有

$$\frac{GM_e m_p}{\left(\alpha+1\right)R_e^2}\Delta l-\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_p\omega_e^2 R_e\Delta l+F_{\text{base}}\Delta l=0\,. \tag{17}$$

于是，

$$F_{\text{base}}=-\frac{GM_e m_p}{\left(\alpha+1\right)R_e^2}+\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_p\omega_e^2 R_e. \tag{18}$$

若$F_{\text{base}}<0$，则供应站对输送管作用力的方向向上.

为便于讨论$L>L_0$、$L=L_0$、$\alpha_m R_e<L<L_0$三种情形，将(18)式改写为

$$\begin{aligned}F_{\text{base}}&=-\frac{GM_e m_p}{\left(\alpha+1\right)R_e^2}+\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_p\omega_e^2 R_e=\frac{m_p\omega_e^2 R_e}{2\left(\alpha+1\right)}\left[\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)-\frac{2GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right]\\&=\frac{m_p\omega_e^2 R_e}{2\left(\alpha+1\right)}\left(\alpha-\alpha_+\right)\left(\alpha-\alpha_-\right)=\frac{m_p\omega_e^2 R_e}{2\left(\alpha+1\right)}\left(\alpha-\alpha_0\right)\left(\alpha-\alpha_-\right).\end{aligned} \tag{19}$$

式中，$\alpha_\pm$由(10)式给出，α_0由(11)式给出.

对于$L>L_0$，亦即$\alpha>\alpha_0$，供应站对输送管作用力的大小由(18)式或(19)式给出，方向向下. 对于$L=L_0$，亦即$\alpha=\alpha_0$，由(19)式有

$$F_{\text{base}}=0\ \ (L=L_0). \tag{20}$$

对于$\alpha_m R_e<L<L_0$，亦即$\alpha_m<\alpha<\alpha_0$，由(19)式可知$F_{\text{base}}<0$. 在此情形下，供应站对输送管作用力的大小为

$$\left|F_{\text{base}}\right|=\frac{GM_e m_p}{\left(\alpha+1\right)R_e^2}-\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_p\omega_e^2 R_e. \tag{21}$$

方向向上.

评分标准：本题 25 分.

第 1 问 6 分，

(1)、(3)、(4)式各 2 分.

第 2 问 6 分，

(5)式 2 分， (6)、(7)式各 1 分，(8)式 2 分.

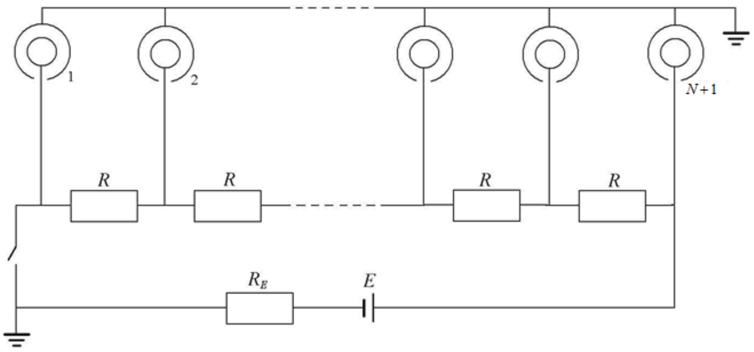
第 3 问 4 分，

(9)式 2 分，(10)式 1 分，(11) 或(12)式 1 分.

第 4 问 9 分，

(13)至(16)式各 1 分，(18)式 1 分，(19)式 2 分，(20)、(21)式各 1 分.

四、（20 分） 一电路包含内阻为R_E、电动势为E的直流电源和N个阻值均为R的相同电阻，有$N+1$个半径为r的相同导体球通过细长导线与电路连接起来. 为消除导体球之间的互相影响，每个导体球的外边都用内半径为$r_0\ (>r)$的同心接地导体薄球壳包围起来，球壳上有小缺口容许细长导线进入但与其绝缘，如图所示. 把导体球按照从左向右的顺序依次编号为 1 到$N+1$. 所有导体球起初不带电，开关闭合并达到稳定状态后，导体球上所带的总电量为Q. 问导体球的半径是多少？已知静电力常量为k.



参考解答：

开关闭合经过较长时间后，电路中将流过稳定的直流电流，导体球上也将有稳定的电荷分布.设第 i 个导体球所带电量为 Q_i ，那么包围它的导体球壳就带有电荷 $-Q_i$ ，这些电荷必定分别均匀地分布在两个球面上，因而导体球和外球壳之间的电势差为

$$\Delta U_i = kQ_i\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right), \tag{1}$$

而外面的导体球壳是接地的，所以第 i 个导体球本身的电势就是

$$U_i = kQ_i\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \tag{2}$$

将(2)式两边对所有的导体球求和，得

$$k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)Q = \sum_{i=1}^{N+1} U_i , \tag{3}$$

其中

$$Q = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i \tag{4}$$

是导体球上所带的总电量. 同时，电路中的直流电流为

$$I = \frac{E}{NR+R_E}. \tag{5}$$

于是第 i 个导体球的电势为

$$U_i = (i-1)IR = \frac{(i-1)ER}{NR+R_E}. \tag{6}$$

把(6)式代入(3)式得

$$k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)Q = \frac{ER}{NR+R_E}\sum_{i=1}^{N+1}(i-1) = \frac{1}{2}N(N+1)\frac{ER}{NR+R_E}. \tag{7}$$

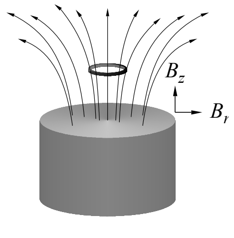
由(7)式可解得

$$r = \left(\frac{N(N+1)ER}{2kQ(NR+R_E)}+\frac{1}{r_0}\right)^{-1}. \tag{8}$$

评分标准：本题 20 分.

(1)式 4 分，(2)、(3)式各 2 分，(4)式 1 分，(5)、(6)、(7)式各 3 分，(8)式 2 分.

五、（20 分） 如图，处于超导态、半径为 r_0 、质量为 m 、自感为 L 的超导细圆环处在竖直放置的柱形磁棒上方，其对称轴与磁棒的对称轴重合. 圆环附近的磁场具有柱对称性，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可用一个竖直分量 $B_z = B_0(1-2\alpha z)$ 和一个径向分量 $B_r = B_0\alpha r$ 近似地描述. 这里 B_0 、α 为大于零的常量，z 、r 分别为竖直和径向位置坐标. 在 $t=0$ 时刻，环心的坐标为 $z=0$ 、 $r=0$ ，环上电流为 I_0（规定圆环中电流的正向与 z 轴正向满



足右手规则）．此时把圆环释放，圆环开始向下运动，其对称轴仍然保持竖直．处于超导态的超导细圆环具有这样的性质：穿过超导细圆环的磁通量保持不变.

1. 圆环作何种运动？给出环心的 z 坐标与时间的依赖关系.
2. 求 t 时刻圆环中电流 I 的表达式.

参考解答：

1. 超导细圆环上有电流 I 时，穿过超导圆环的磁通量为

$$\Phi = \pi r_0^2 B_z + LI \tag{1}$$

把 $B_z = B_0(1-2\alpha z)$ 代入上式，得

$$\Phi = \pi r_0^2 B_0(1-2\alpha z) + LI \ . \tag{2}$$

由于穿过超导圆环的磁通量保持不变，因此 Φ 为常量．由初始条件：$t=0$ 时，$z=0$、$r=0$，$I=I_0$，有

$$\Phi_0 = \pi r_0^2 B_0 + LI_0 \ . \tag{3}$$

于是

$$I = \frac{2}{L}\pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0 \equiv I(z)\ . \tag{4}$$

现在考虑作用在圆环上的安培力．由于磁场为非均匀磁场，因此作用在圆环上的安培力不为零．由于轴对称性，安培力的方向沿轴线．作用在圆环上的安培力为

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{A}}(z) &= -B_r(z) I(z) 2\pi r_0 \\ &= -B_0 \alpha r_0 \left(\frac{2}{L}\pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0\right) 2\pi r_0 \\ &= -kz - F_0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{L}\pi^2\alpha^2 B_0^2 r_0^4, \\ F_0 &= 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0. \end{aligned} \tag{6}$$

再考虑到作用在圆环上的重力 $F_g(z) = -mg$，作用在圆环上的合力为

$$F(z) = F_{\mathrm{A}}(z) + F_g(z) = -kz - (mg + F_0)\ . \tag{7}$$

在平衡位置 z_0 处，$F(z_0)=0$．由上式，得平衡位置为

$$z_0 = -\frac{mg+F_0}{k} = -\frac{(mg + 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2\alpha^2 B_0^2 r_0^4}\ . \tag{8}$$

由(7)式可知，圆环的运动为在其平衡位置附近的简谐振动，振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}\ , \tag{9}$$

圆环在 t 时刻的 z 坐标的一般形式为

$$z(t) = z_0 + A\cos(\omega t + \varphi_0)\ , \tag{10}$$

其中振幅 A 和初始相位 φ_0 由初始条件

$$z(t=0) = 0, \quad v_z(t=0) = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \tag{11}$$

决定．由(10)、(11)式得

$$z_0 + A\cos\varphi_0 = 0, \quad \omega A\sin\varphi_0 = 0$$

因此，

$$A = -z_0, \quad \varphi_0 = 0\ . \tag{12}$$

于是，

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_0 - z_0\cos(\omega t) \\
&= -z_0[\cos(\omega t) - 1] \\
&= \frac{(mg + 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2\alpha^2 B_0^2 r_0^4}\left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}t\right) - 1\right].
\end{aligned} \tag{13}
$$

2. 把(13)式代入(4)式，得 t 时刻圆环中电流的表达式

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}t\right) - 1\right] + I_0 \\
&= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0\right)\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}t\right) - \frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

评分标准：本题 20 分.

第 1 问 18 分，

(1)式 2 分，(2)至(4)式各 1 分，

(5)式 2 分，(6)、(7)、(8)式各 1 分，

(9)、(10)式各 2 分，(11)式 1 分，

(12)式 2 分，(13)式 1 分.

第 2 问 2 分，

(14)式 2 分.

六、（15 分） 一厚度为 t 的薄金属盘悬吊在温度为 $300.0\,\mathrm{K}$ 的空气中，其上表面受太阳直射，温度为 $360.0\,\mathrm{K}$，下表面的温度为 $340.0\,\mathrm{K}$. 空气的温度保持不变，单位时间内金属盘每个表面散失到空气中的能量与此表面和空气的温度差以及此表面的面积成正比，忽略金属盘侧面的能量损失. 若金属盘的厚度变为原来的 2 倍，求金属盘上、下表面的温度.

参考解答: 设金属盘上、下表面的温度分别为 T_t、T_b，空气的温度为 T_0. 根据题意，金属盘上、下表面单位时间内向空气散失的能量分别为

$$
cA(T_t - T_0),\ cA(T_b - T_0), \tag{1}
$$

其中 c 为常量，A 为金属盘表面的面积. 设上表面单位时间内吸收的太阳光的能量为 P_a. 根据能量守恒有

$$
P_a = cA(T_t - T_0) + cA(T_b - T_0). \tag{2}
$$

因此，

$$
T_t + T_b = \frac{P_a + 2cAT_0}{cA} = \frac{P_a}{cA} + 2T_0. \tag{3}
$$

可见金属盘上、下表面温度的和为常量. 由题给数据，有

$$
T_t + T_b = 360.0\,\mathrm{K} + 340.0\,\mathrm{K} = 700.0\,\mathrm{K}. \tag{4}
$$

当金属盘的厚度为 t 时，根据热传导定律，单位时间内从金属盘的上表面传导到下表面的热量为

$$
P_c = kA\frac{T_t - T_b}{t}, \tag{5}
$$

其中 k 为热传导系数. 从金属盘的上表面传导到下表面的热量通过下表面散失到空气中，故

$$
kA\frac{T_t - T_b}{t} = cA(T_b - T_0). \tag{6}
$$

当金属盘的厚度为 $2t$ 时，设其上、下表面的温度分别为 T_t'、T_b'，同理有

$$
kA\frac{T_t' - T_b'}{2t} = cA(T_b' - T_0). \tag{7}
$$

用(6)式去除(7)式，并利用(4)式以及

$$
T_t' + T_b' = 700.0\,\mathrm{K}, \tag{8}
$$

有

$$
\frac{700.0\,\mathrm{K} - 2T_b'}{2\times(700.0\,\mathrm{K} - 2T_b)} = \frac{T_b' - T_0}{T_b - T_0}. \tag{9}
$$

由上式，得

$$T_b' = \frac{700.0\,\mathrm{K}\left(T_b + T_0\right) - 4T_bT_0}{1400.0\,\mathrm{K} - 2T_b - 2T_0} \approx 333.3\,\mathrm{K}\,. \tag{10}$$

由(8)式，有

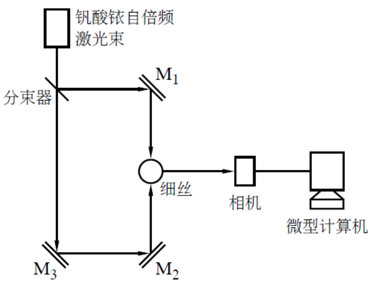
$$T_t' = 700\,\mathrm{K} - T_b' \approx 366.7\,\mathrm{K}\,. \tag{11}$$

评分标准：本题 15 分.

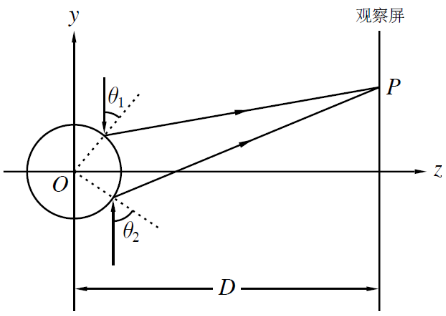
(1)、(2)式各 2 分，(3)、(4)式各 1 分，

(5)、(6)式各 2 分，(7)至(11)式各 1 分.

七、（15 分）亚毫米细丝直径的双光束干涉测量装置如图(a)所示，其中M_1、M_2、M_3为全反射镜，相机为 CCD (电荷耦合装置)相机. 来自钒酸铱自倍频激光器的激光束被分束器分成两束，一束经全反镜M_1反射后从上侧入射到细丝上；另一束经全反镜M_3和M_2相继反射后从下侧入射到细丝上. 图(b)给出了两条反射光线产生干涉的光路，其中q_1、q_2分别为上、下两侧的入射角，D为细丝轴线到观察屏(即相机感光片)的距离，P为两条反射线在观察屏上的交点. 已建立这样的直角坐标系：坐标原点O位于细丝的轴线上，x轴(未画出)沿细丝轴线、指向纸面内，y轴与入射到细丝上的光线平行(y轴的正向向上)，z轴指向观察屏并与其垂直. 已知光波长为λ，屏上干涉条纹的间距为a. 由于D远大于细丝直径和观察屏的尺寸，可假设投射到屏上的只有非常接近平行于z轴的细光束.



图(a)

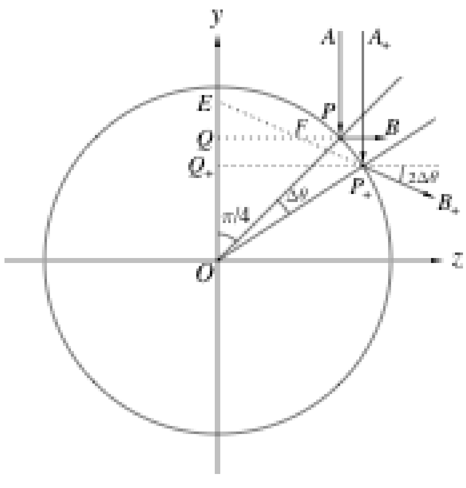


图(b)

1. 由于细丝到观察屏的距离远大于观察屏的尺寸，因而上、下两侧的入射光只有45°入射角附近的细光束经细丝反射到屏上，上、下两侧的反射光束分别形成两个虚像. 试求这两个虚像的位置. (注：当$x\sim 0$时，$\sin x\sim x$，$\cos x\sim 1$)
2. 求细丝的直径d.

参考解答：

1. 考虑上侧以45°角入射到细丝外表面的细光束AP，它被经细丝外表面反射后成方向平行于 z 轴正向的反射光PB，其反向延长线与y轴交于Q点，如图所示. 由几何关系可知，光线PB离xz平面的距离为



$$OQ = +\frac{\sqrt{2}}{4}d = y_+ \tag{1}$$

考虑上侧以$45° + \Delta\theta$（$\Delta\theta$很小）角入射到细丝外表面的细光束A_+P_+，它被经细丝外表面反射后的反射光P_+B_+，其反向延长线与y轴交于E点，如图所示. 由反射定律可知

$$\angle A_+P_+B_+ = 2\times(45° + \Delta\theta) \tag{2}$$

因而，反射光P_+B_+与 z 轴的夹角为

$$2\Delta\theta \tag{3}$$

考虑ΔEOP_+，由几何关系可知

$$\angle EP_+O = 45° + \Delta\theta = \angle EOP_+$$

于是

$$OE = P_+E \tag{4}$$

由于$OP_+ = d/2$，所以

$$\frac{d}{4} = OE\cos(45° + \Delta\theta)$$

利用

$$\cos(45° + \Delta\theta) = \cos 45°\cos\Delta\theta - \sin 45°\sin\Delta\theta$$

和

$$\cos\Delta\theta \sim 1，\quad \sin\Delta\theta \sim \Delta\theta，当\Delta\theta \sim 0$$

可得

$$\cos(45° + \Delta\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \Delta\theta)$$

所以

$$OE = \frac{\sqrt{2}d}{4(1-\Delta\theta)} \approx \frac{\sqrt{2}d}{4}(1 + \Delta\theta) \tag{5}$$

因而由(1)、(5)式得

$$QE = OE - OQ = \frac{\sqrt{2}d}{4}\Delta\theta \tag{6}$$

进而，设EB_+交QB于F（设其z坐标为z_+），则在直角三角形EQF中有

$$z_+ = QF = \frac{QE}{\tan(2\Delta\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{4}d\frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{8}d \tag{7}$$

因此，上侧入射角在$\pi/4$附近的入射光线虚像的位置为

$$y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d,\ z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d\ . \tag{8}$$

利用对称性可见，下侧入射角在$\pi/4$附近的入射光线虚像的位置为

$$y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d,\ z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d\ . \tag{9}$$

[另解二：

(前解答中由开始到"夹角为$2\Delta\theta$"全部保留).

$$PP_+ = r\Delta\theta,\ PQ = OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \tag{4}$$

进而，由于PP_+与QB的夹角为$45°$，可得

$$Q_+P_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta\ .$$

反向延长P_+B_+交y轴于E，在直角三角形EQ_+P_+中

$$\begin{aligned} Q_+E &= Q_+P_+\cdot\tan(2\Delta\theta) \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{2}r(1+\Delta\theta)\cdot 2\Delta\theta \\ &\approx \sqrt{2}\,r\Delta\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

考虑到$QQ_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta$，所以精确到$\Delta\theta$

$$Q_+E = 2Q_+Q \tag{6}$$

由$\Delta EQF \sim \Delta EQ_+P_+$有

$$z_+ \equiv QF = \frac{1}{2}P_+Q_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}r = \frac{\sqrt{2}}{8}d\ . \tag{7}$$

F是PB、P_+B_+两条反射光线反向延长线的交点，即为虚像.

对于$\Delta\theta < 0$的情形，得到虚像位置不变. 由对称性可知，下侧虚像位置与上侧虚像以z

轴为对称.

上虚像：$y_{+}=+\dfrac{\sqrt{2}}{4}d$，$z_{+}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}d$，　(8)

下虚像：$y_{-}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}d$，$z_{-}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}d$.　(9)

]

2. 本问题可视为由上、下两侧的反射光束分别形成的虚光源所发出的光线之间的干涉，相当于双缝位置分别在 $y_{+}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}d$，$z_{+}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}d$ 和 $y_{-}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}d$，$z_{-}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}d$ 的双缝干涉．双缝屏与观察屏之间的距离为 $D-\dfrac{\sqrt{2}d}{8}\approx D$，双缝间距为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}d$．故条纹间距

$$a=\lambda\frac{D}{\left(\sqrt{2}/2\right)d}=\frac{\sqrt{2}\lambda D}{d} \tag{10}$$

由此得，细丝的直径d为

$$d=\frac{\sqrt{2}\lambda D}{a} \tag{11}$$

评分标准：本题 15 分.

第 1 问 10 分，

(1)、(2)式各 1 分，(3)式 2 分，(4)至(9)式各 1 分.

第 2 问 5 分，

(10)式 3 分，(11)式 2 分.

八、（15 分） 相对于站立在地面的李同学，张同学以相对论速率v向右运动，王同学以同样的速率v向左运动. 当张同学和王同学相遇时，三位同学各自把自己时钟的读数调整到零. 当张同学和王同学之间的距离为L时(在地面参考系中观察)，张同学拍一下手. 已知张同学和王同学之间的相对速率为

$$v_r=\frac{2\beta c}{1+\beta^2},$$

其中$\beta=\dfrac{v}{c}$，c为真空中的光速.

1. 求张同学拍手时其随身携带的时钟的读数.
2. 从王同学自身静止的参考系看，在张同学拍手这一事件发生的时刻，王同学也拍一下手. 从张同学自身静止的参考系看，在王同学拍手这一事件发生的时刻，张同学第二次拍一下手. 从王同学自身静止的参考系看，在张同学第二次拍手这一事件发生的时刻，王同学第二次拍一下手. 照此继续下去. 求当张同学第n次拍手时地面参考系中张、王同学之间的距离.
3. 从李同学自身静止的参考系看，张同学和王同学依次拍手的时刻为多少？并指出这些时刻的顺序.

参考解答：

1. 在地面参考系 S 中，从张同学和王同学相遇，到他们之间的距离为L时，时间间隔为

$$\Delta t=\frac{L}{2v}. \tag{1}$$

在张同学自身静止的参考系S′中，张同学开始两次读其随身携带的时钟的两个事件发生在同一地点，因此张同学拍手时其随身携带的时钟的读数T为固有时间或原时. 利用时间的相对论效应得

$$T=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\Delta t\sqrt{1-\beta^2}=\frac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2}$$

2. 在参考系S′中，张同学第一次拍手这一事件 1 发生的时刻和位置分别是$t_1'=T$ 和 $x_1'=0$．已设张、王同学分别位于各自参考系中直角坐标系的坐标原点，两参考系中直角坐标系的原点在$t'=t'=0$时重合、x'

和 x'' 轴重合且同向. 而在王同学自身静止的参考系 S'' 中，张同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应，在参考系 S'' 中事件 1 发生的时刻 t_1''（此即王同学随身携带的时钟的读数）为

$$t_1'' = \gamma t_1' = \gamma T \,, \tag{3}$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}, \tag{4}$$

推导中已应用了张同学相对于王同学做匀速直线运动的速率 v_r 的表达式. 注意：在参考系 S'' 中事件 1 发生的位置并不在王同学自身所在处或原点，而在 $x_2'' \neq 0$.

依题意，王同学在时刻

$$t_2'' = t_1'' = \gamma T \tag{5}$$

拍手，这一事件在参考系 S'' 中发生的时刻和位置分别是 $t_2'' = t_1''$ 和原点 $x_2'' = 0$，是和事件 1 不同的另一事件，记为事件 2. 而在张同学自身静止的参考系 S' 中，王同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应，在参考系 S' 中事件 2 发生的时刻 t_2' 为

$$t_2' = \gamma t_2'' = \gamma(\gamma T) = \gamma^2 T \,, \tag{6}$$

依题意，张同学在时刻

$$t_3' = t_2' = \gamma^2 T \tag{7}$$

第二次拍手(事件 3)，t_3' 即为其随身携带的时钟的读数.

照此继续下去. 当张同学第 n 次拍手时，第 $2n-1$ 个事件在参考系 S' 中发生的时刻 t_{2n-1}'（或张同学随身携带的时钟的读数）为

$$t_{2n-1}' = \gamma^{2(n-1)} T. \tag{8}$$

由于在张同学每次观察到的时间间隔 T 内，张、王同学之间在地面参考系中的距离增加 L. 于是，张同学第 n 次拍手时，张、王同学之间在地面参考系中的距离为

$$d_n = \gamma^{2(n-1)} L = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{2(n-1)} L. \tag{9}$$

3. 利用时间的相对论效应，从李同学自身静止的参考系看，张同学和王同学依次拍手的时刻为

$$t_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_1' = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} T = \frac{L}{2v} \,, \tag{10}$$

$$t_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_2'' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma T) = \gamma \frac{L}{2v} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\frac{L}{2v} \,, \tag{11}$$

$$t_3 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_3' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma^2 T) = \gamma^2 \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 \frac{L}{2v} \,, \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$t_{2n-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_{2n-1}' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma^{2(n-1)} T) = \gamma^{2(n-1)} \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{2(n-1)} \frac{L}{2v} \,. \tag{13}$$

由(10)至(13)式可直接看出

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{2n-1} \tag{14}$$

评分标准：本题 15 分.

第 1 问 3 分，

(1)式 1 分，(2)式 2 分.

第 2 问 8 分，

(3)至(6)式各 1 分，(8)、(9)式各 2 分.

第 3 问 4 分，

(10)、(11)、(13)、(14)式各 1 分.